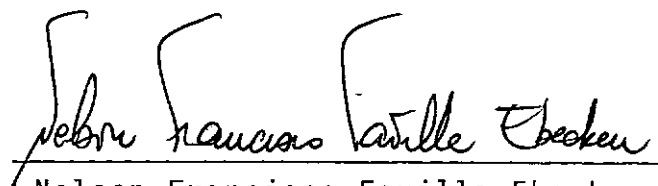


UM ESTUDO SOBRE MÉTODOS DE INTEGRAÇÃO DIRETA PARA A ANÁLISE DINÂMICA NÃO-LINEAR DE ESTRUTURAS

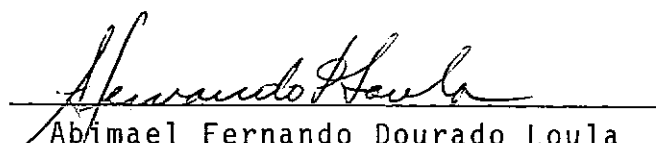
Regina Célia Paula Leal Toledo

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE
PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JA
NEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO
GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.).

Aprovada por:


Nelson Francisco Favilla Ebecken
Presidente


Edison C. Prates de Lima


Abimael Fernando Dourado Loula

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

MARÇO 1983

TOLEDO, REGINA CÉLIA PAULA LEAL

Um Estudo sobre Métodos de Integração Direta para a Análise Dinâmica Não-linear de Estruturas [Rio de Janeiro] 1983.

VI, 96 p. 29,7cm (COPPE-UFRJ, M.Sc., Engenharia Civil, 1983)

Tese - Univ. Fed. Rio de Janeiro. Fac. Engenharia

1. Dinâmica Não-linear, Integração Direta

I. COPPE/UFRJ II. Título (série).

"Aqueles que permanecerão sempre
vivos em mim, como você,

amigo Acyr,
meu pai."

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador Nelson Francisco Favilla Ebecken agradeço sobretudo pela amizade e dedicação durante a execução deste trabalho. A orientação da tese é transitória mas a lição de companheirismo foi aprendida. Dela não me esquecerei.

A Abimael Fernando Dourado Loula e Augusto Cesar Noronha Rodrigues Galeão pela amizade e boa vontade com que me atenderam todas as vezes que a eles recorri.

A Hêlio José Correa Barbosa pelo tema da tese e pela amizade.

Ao professor Waldyr Azevedo Junior e ao Fernando A. S. Amorim agradeço pela carinhosa "hospedagem" e discussões com as quais muito aprendi.

A Cristina Raymundo pela compreensão, eficiência e carinho na datilografia deste trabalho.

A Luis Carlos da Silva (o "Prê") por todas as idas ao NCE.

Ao CNPq pelo auxílio financeiro.

Aos meus amigos da COPPE e do LCC pelo carinho e incentivo.

Ao Elson, meu companheiro, pela paciência, discussões, brigas e solidariedade demonstradas, sem as quais este trabalho não teria prosseguido, o meu agradecimento especial.

A meus filhos Gustavo e Tiago agradeço, me desculpando por todos carinhos e atenções roubados por este trabalho.

RESUMO

Avaliam-se neste trabalho, as principais características numéricas dos algoritmos de integração direta para a análise dinâmica não-linear pelo Método dos Elementos Finitos.

Este estudo inclui o Método de Newmark e Diferença Central. Analisa-se também o tratamento das parcelas não-lineares como pseudo-forças.

Alguns procedimentos iterativos para a verificação de equilíbrio dinâmico e estabilidade dos algoritmos, baseados no conceito de conservação de energia, são examinados e confrontados com os critérios usualmente implementados.

Diversos resultados são apresentados e discutidos, com a finalidade de se fornecer subsídios para as análises de problemas práticos da engenharia.

ABSTRACT

In this work we study numerical aspects of direct integration algorithms for non-linear dynamic analysis by the Finite Element Method.

Included here are the Newmark Method, the Central Difference Method and also the treatment of the non-linear terms as pseudo-forces.

Some criteria based on energy conservation concepts which are used to check both the dynamic equilibrium and algorithm stability are examined and compared with criteria usually employed.

Numerical results are presented and discussed in order to provide practical guidelines to the analysis of engineering problems.

ÍNDICE

	PÁG.
CAPÍTULO I . INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO II . ANÁLISE LINEAR - UMA REVISÃO	5
2.1. O Problema	5
2.2. Características Gerais	6
2.3. Convergência	9
2.3.1. Problema Bem Posto	10
2.3.2. Consistência	10
2.3.3. Estabilidade	11
2.3.4. Estudo da Estabilidade	14
2.3.4.1. Introdução	14
2.3.4.2. Método das Diferenças Centrais	15
2.3.4.3. Método de Newmark	17
CAPÍTULO III. ALGORITMO DE DIFERENÇA CENTRAL	23
3.1. Introdução	23
3.2. Estabilidade	23
3.3. Uma Aproximação para ΔT_{crit}	28
3.4. Verificação da Estabilidade	30
3.5. Exemplos	35
3.5.1. Exemplo I	35
3.5.2. Exemplo II	40
3.5.3. Exemplo III	44
CAPÍTULO IV . ALGORITMO DE NEWMARK	48
4.1. Introdução	48

4.2. Características Gerais	48
4.3. Verificação do Equilíbrio Dinâmico - Rigidez Tangente	51
4.4. Discretização da Energia	52
4.5. Estudo da Estabilidade	54
4.6. Critérios de Convergência	57
4.7. Análise de Resultados	59
4.7.1. Exemplo I	59
4.7.2. Exemplo II	61
4.7.3. Exemplo III	65
4.7.4. Exemplo IV	68
4.8. Comentários Gerais	68
4.9. Verificação do Equilíbrio Dinâmico - Pseudo-Forças	72
4.9.1. Exemplo I	74
4.9.2. Exemplo II	77
CAPÍTULO V . CONCLUSÃO	81
BIBLIOGRAFIA	83
APÊNDICE A	89
APÊNDICE B	91

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Os métodos de integração direta no tempo, são atualmente muito utilizados em diversos problemas práticos de engenharia.

O comportamento destes métodos na análise dinâmica linear, é bem conhecido no que diz respeito à convergência e estabilidade.

Recentemente a análise não linear de estruturas tem sido necessária em diversas áreas, sendo mais comum em problemas que envolvem impacto, como na engenharia nuclear, problemas com grandes deslocamentos e interações de meios, como na engenharia de estruturas offshore.

Nestes casos, não existe consenso geral sobre o comportamento destes algoritmos.

O procedimento usual envolve exaustivos experimentos numéricos, tentando-se obter dados empíricos para contribuir na escolha de um ou outro algoritmo.

Os métodos de integração direta, estão divididos em dois grandes grupos:

- a) implícitos
- b) explícitos

Na análise linear de estruturas, entre os métodos mais difundidos, estão os de Newmark (implícito) e o da Diferença Central (explícito).

O método da diferença central, por ser explícito, é condicionalmente estável, estando o intervalo de tempo utilizado, li

mitado por um intervalo máximo (Δt_{crit}), para garantir a estabilidade. Por outro lado, este é um método de fácil implementação e baixo custo computacional para transientes de curta duração. O método de Newmark, que é incondicionalmente estável, permite a utilização de intervalos de tempo maiores, entretanto, traz a desvantagem de se ter que fatorar a matriz de rigidez efetiva toda a vez que os efeitos não lineares se tornam significativos.

A escolha entre um método implícito ou explícito, depende do problema em questão, assim como a própria escolha do modelo de elementos finitos a ser utilizado.

Os problemas de dinâmica, podem ser divididos em dois grandes grupos, cada um dos quais conceituados por Bathe como se segue:

- Grupo I

Estão incluídos neste grupo, problemas em que apenas os modos inferiores (ou somente alguns intermediários) do sistema físico são excitados pelo vetor de carregamento.

Desenvolvendo-se o carregamento em série de Fourier, pode-se constatar qual a frequência máxima ω_n contida no carregamento dinâmico. A malha de elementos finitos adotada deverá representar os modos de vibração com até $4\omega_n$. A contribuição de frequências acima destas, não influem decisivamente na solução na maioria dos casos. Para este tipo de problema, normalmente, um algoritmo de integração implícita é mais eficiente, e o intervalo de tempo a ser utilizado é sugerido ser $\frac{1}{20} T_i$, sendo $T_i = \frac{2\pi}{\omega_i}$, onde ω_i é a maior frequência do modelo discreto. É usual também neste caso, no modelo de elementos finitos, dar-se preferência a utilização de elementos refinados e de formulação consisten

te.

- Grupo II

Nos problemas incluídos neste grupo, a resposta é rica em todo espectro de frequências, como problemas de choque, por exemplo. Desenvolvendo-se o carregamento em série de Fourier, deve-se escolher uma frequência de corte, ω_n , suficientemente grande para representar bem o carregamento. A dificuldade está na determinação desta frequência, para que a solução dada pelo modelo discreto possa representar bem a solução do sistema contínuo.

De modo a obter-se uma malha apropriada para a análise de problemas deste tipo, Bathe sugere:

$$t_\omega = \frac{L_\omega}{c} \quad \text{onde}$$

c - velocidade da onda

L_ω - comprimento de onda a ser representado.

Assumindo-se que n intervalos de tempo são necessárias para a representação desta onda:

$$\Delta t = \frac{t_\omega}{n}$$

e o "comprimento efetivo" do elemento a ser empregado deve ser

$$L_e = c \Delta t$$

No presente trabalho, examinam-se situações e testam-se alguns critérios propostos para verificação da estabilidade dos dois algoritmos mencionados, já que os mesmos, são os mais comumente empregados na prática.

Estes critérios propostos, foram implantados no sistema LORANE-NL, fazendo-se uso de precisão simples do computador B-6700, que considera 12 algarismos significativos.

No capítulo II, apresenta-se um resumo dos conceitos e do estudo da estabilidade dos algoritmos de Newmark e Diferença Central, quando aplicado a análise linear de estruturas.

No capítulo III, estuda-se o algoritmo de Diferença Central. Utiliza-se o conceito de conservação de energia, na determinação de Δt_{crit} , e no critério sugerido por Belytschko, Chia - petta e Bartel⁴⁰, para se detectar a instabilidade na solução. Exemplos típicos são analisados, tentando-se esclarecer o comportamento do algoritmo e a validade da verificação sugerida, frente a diversos tipos de não linearidade.

O algoritmo de Newmark é abordado no capítulo IV, fazendo-se considerações sobre o estudo de sua estabilidade. Utiliza-se para aproximação da não linearidade, a rigidez tangente ou o tratamento por pseudo-forças.

Testam-se os critérios para verificação do equilíbrio dinâmico em alguns casos, procurando-se examinar os resultados e a performance computacional. No capítulo V, faz-se um resumo das conclusões obtidas nos experimentos numéricos dos capítulos III e IV, sugerindo-se ainda aspectos que devem ser examinados para continuação ao presente trabalho.

CAPÍTULO II

ANÁLISE LINEAR - UMA REVISÃO

2.1. O PROBLEMA

As equações de equilíbrio dinâmico de um sistema estrutural podem ser colocadas na forma:

$$\underline{M} \ddot{\underline{u}} + \underline{C} \dot{\underline{u}} + \underline{K} \underline{u} = \underline{P}(t) \quad (2.1a)$$

onde \underline{M} é a matriz de massa, \underline{C} a matriz de amortecimento, \underline{K} a matriz de rigidez. Todas constantes, simétricas e em banda, resultantes de uma discretização espacial pelo Método dos Elementos Finitos. \underline{M} e \underline{K} são positivas e definidas e \underline{C} , positiva, semi-definida; \underline{u} , $\dot{\underline{u}}$ e $\ddot{\underline{u}}$ os vetores dos deslocamentos, velocidades e acelerações respectivamente.

Deseja-se resolver o problema de valor inicial, que consiste em encontrar $\underline{u}(t)$ que satisfaça simultaneamente a (2.1a) e às seguintes condições iniciais:

$$\begin{aligned} \underline{u}(0) &= \underline{u}_0 \\ \dot{\underline{u}}(0) &= \underline{v}_0 \end{aligned} \quad (2.1b)$$

em todo $t \in (0, T)$.

A resolução de (2.1) poderia ser feita via de regra, por qualquer procedimento numérico clássico para resolução de problemas de valor inicial, mas foi constatado que na maioria dos problemas, deve-se preferir métodos especialmente adaptados para as

características próprias da dinâmica estrutural. Os processos mais utilizados para resolução de tais problemas são usualmente classificados em dois grupos:

- a) superposição modal
- b) integração direta

O método da superposição modal, se aplica com mais eficiência a problemas onde há predominância dos modos inferiores sobre os mais elevados e as matrizes \underline{M} , \underline{C} e \underline{K} não variam ao longo do tempo. Já o método da integração direta, não faz restrições às mesmas matrizes.

O termo "direta" é utilizado, uma vez que esta técnica não requer, a priori, transformações no sistema de equações de equilíbrio dinâmico, o que não acontece na análise modal, onde inicialmente se faz uma mudança de base.

No presente capítulo são revisados alguns aspectos dos métodos de integração direta no tempo.

Entre os mais utilizados na prática, estão o método das diferenças centrais, e o de Newmark.

2.2. CARACTERÍSTICAS GERAIS

Com relação a esses métodos de integração direta faz-se a seguir algumas considerações no que diz respeito a estabilidade, precisão e eficiência computacional dos mesmos.

A experiência tem mostrado que métodos de segunda ordem, são muito superiores aos de primeira ordem, e um resultado devido a Dahlquist mostra que não existem métodos de ter

ceira ordem, incondicionalmente estáveis.

Quando se estuda um problema de resposta dinâmica, pode-se identificar 4 tipos de soluções^{7,16}:

- 1) A solução exata das equações de movimento do sistema contínuo;
- 2) a solução exata das equações de movimento já discretizada no espaço (eq. 2.1), com número ilimitado de dígitos;
- 3) a solução exata das equações de movimento (2.1), porém com número limitado de dígitos;
- 4) a solução aproximada de (2.1) usando-se um operador de integração direta e com aritmética de precisão finita.

A diferença entre a solução exata do sistema contínuo e a do sistema discreto, denomina-se erro de truncamento e é a diferença entre as soluções descritas nos itens 1 e 2.

Quando se trabalha com aritmética de precisão finita, tem-se o erro de arredondamento (round-off error) que é a diferença entre as soluções dos itens 2 e 3.

O erro cometido entre as soluções em 3 e 4 é o erro de integração e depende do algoritmo de integração utilizado.

A discretização de um operador diferencial, pode ser feita de várias formas, como por exemplo, com o uso de fórmulas de diferenças finitas - como no método das diferenças centrais - ou então, assumindo-se uma forma de variação para deslocamentos, velocidades e acelerações a cada intervalo de tempo e satisfazendo-se as equações de movimento em algum ponto do intervalo, como é o caso dos métodos de Wilson θ e de Newmark.

Qualquer que seja a metodologia utilizada, chega-se a uma relação de recorrência da seguinte forma:

$$\underline{A}_1 \underline{X}_{n+1} = \underline{A}_0 \underline{X}_{n,n-1,\dots} + \underline{P} \quad (2.2)$$

que permite o avanço da solução no tempo. O vetor \underline{X}_{n+1} é o vetor dos deslocamentos, velocidades e acelerações no tempo $t+\Delta t$; $\underline{X}_{n,n-1,\dots}$, o vetor dos deslocamentos, velocidades e acelerações nos tempos $t, t-\Delta t, \dots$; o vetor \underline{P} depende da excitação externa e as matrizes \underline{A}_0 e \underline{A}_1 dos parâmetros físicos da estrutura (matrizes de massa, rigidez, amortecimento e do intervalo de tempo Δt).

Supondo \underline{A}_1 inversível, pode-se escrever:

$$\underline{X}_{n+1} = \underline{A}_1^{-1} \underline{A}_0 \underline{X}_{n,n-1,\dots} + \underline{A}_1^{-1} \underline{P} \quad (2.3)$$

Chamando-se:

$$\underline{A} = \underline{A}_1^{-1} \underline{A}_0$$

$$\underline{L} = \underline{A}_1^{-1} \underline{P}$$

$$\text{Assim, } \underline{X}_{n+1} = \underline{A} \underline{X}_{n,n-1,\dots} + \underline{L} \quad (2.4)$$

onde \underline{A} é denominada de operador de aproximação ou de integração.

Se as matrizes \underline{M} , \underline{C} e \underline{K} não são dependentes dos deslocamentos ou de suas derivadas, a transformação é dita linear.

Um algoritmo é dito explícito, quando \underline{A}_1 puder ser colocada na forma triangular. Quando houver necessidade de se fazer uma fatoração para se resolver o sistema, o algoritmo é dito implícito.

Quando o vetor $\underline{X}_{n,n-1,\dots}$ contem somente informações do

tempo anterior ao considerado, ou seja, $\underline{x}_{n,n-1}, \dots = \underline{x}_n$ o método é dito de um passo (one-step), caso contrário, de múltiplos passos.

Os métodos de um passo, têm a vantagem de serem auto-iniciáveis, pois necessitam apenas de informações do passo anterior, necessitando dessa forma, armazenar menos informações de tempos anteriores.

Considere a equação (2.1). Supondo-se que não haja excitação externa ($\underline{F}=0$) e que o sistema não seja amortecido ($\underline{C}=0$):

$$\underline{M} \ddot{\underline{u}} + \underline{K} \underline{u} = \underline{0} \quad (2.5)$$

A equação (2.5) pode tomar então, a seguinte forma para um algoritmo de um passo:

$$\underline{x}_{n+1} = \underline{A} \underline{x}_n \quad (2.6)$$

Para se colocar \underline{x}_{n+1} em função de \underline{x}_0 , utiliza-se recursivamente (2.6) e obtém-se:

$$\underline{x}_{n+1} = \underline{A}^n \underline{x}_0 \quad (2.7)$$

As definições dadas a seguir, baseiam-se no trabalho de Guimarães⁴.

2.3. CONVERGÊNCIA

Para o estudo da convergência dos algoritmos de integração direta, utiliza-se o "Teorema da Equivalência" de Lax que estabelece:

"Dado um problema de valor inicial bem posto e um operador de aproximação $\underline{A}(\Delta t)$ consistente, este operador será convergente se e só se, for estável".

Com objetivo de esclarecer melhor, define-se a seguir, problemas bem postos, consistência e estabilidade, embora no presente trabalho só se faça o estudo da estabilidade.

2.3.1. PROBLEMA BEM POSTO

Tendo-se o problema de valor inicial (2.1), cuja solução pode ser colocada na forma

$$\underline{X}(t) = \underline{U}(t) \underline{X}(0)$$

sendo $\underline{U}(t)$ um operador, $\underline{X}(t)$ o vetor contendo a função deslocamentos \underline{u} e suas derivadas no instante t e $\underline{X}(0)$ o vetor das condições iniciais. Diz-se que o problema é bem posto se $\underline{U}(t)$ for uniformemente limitada ou seja, ao se dar uma variação $\underline{\delta}$ nas condições iniciais $\underline{X}(0)$ a variação na solução $\underline{X}(t)$ é da ordem $o(\underline{\delta})$.

Isto é, deverá existir uma constante k tal que

$$\| \{ \underline{U}(t) \} \underline{\delta} \| \leq k \| \underline{\delta} \| \quad , \quad 0 \leq t \leq T \quad (2.8)$$

Sendo $\| \cdot \|$ uma certa norma.

2.3.2. CONSISTÊNCIA

Seja

$$\frac{d}{dt} \underline{X}(t) = \underline{G} \underline{X}(t) \quad (2.9)$$

onde \underline{G} é um operador.

Pode-se aproximar (2.9) da seguinte forma:

$$\frac{\underline{X}_{t+\Delta t} - \underline{X}_t}{\Delta t} = \frac{\underline{A} \underline{X}_t - \underline{X}_t}{\Delta t} \quad (2.10)$$

se,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\| \left\{ \frac{\underline{A} - \underline{I}}{\Delta t} - \underline{G} \right\} \underline{X}_t \right\| = 0 \quad (2.11)$$

para qualquer $0 \leq t \leq T$, diz-se que o operador de diferenças finitas $\underline{A}(\Delta t)$ é uma aproximação consistente para o operador \underline{G} .

2.3.3. ESTABILIDADE

A noção de estabilidade para sistemas discretos, corresponde à noção de problemas bem postos em sistemas contínuos.

Para se verificar se um algoritmo é estável analisa-se a influência de uma perturbação em um passo, nos passos subsequentes; ou seja, todos os operadores do conjunto $\underline{A}^n(\Delta t)$, $n=0,1,2,\dots$, devem ser uniformemente limitados.

Sendo \underline{y} a perturbação dada aos dados iniciais \underline{x} , deverá existir uma constante finita k tal que:

$$\| \{ \underline{A} \} \underline{y} \| \leq k \| \underline{y} \|, \quad 0 \leq n \Delta t \leq T \quad (2.12)$$

Uma forma de se fazer este estudo é utilizando-se o raio espectral de \underline{A} que é definido como¹:

$$\rho = \max |\lambda_i| \quad (2.13)$$

sendo $|\lambda_i|$ o módulo dos autovalores de \underline{A} .

Decompondo-se a \underline{A} da seguinte forma:

$$\underline{A} = \underline{P} \underline{J} \underline{P}^{-1} \quad (2.14)$$

onde \underline{P} é uma matriz contendo os autovetores de \underline{A} e \underline{J} uma matriz diagonal contendo os autovalores de \underline{A} .

Dessa forma, tem-se:

$$\underline{A}^n = \underline{P} \underline{J}^n \underline{P}^{-1} \quad (2.15)$$

Logo para que todos os operadores do conjunto \underline{A}^n sejam limitados, os módulos dos autovalores desses operadores têm de ser limitados pela unidade.

Assim, pode-se notar que a solução aproximada de (2.5), comporta-se da seguinte forma:

- se $\rho > 1$, a solução é amplificada quando $t \rightarrow \infty$
- se $\rho < 1$, a solução é amortecida quando $t \rightarrow \infty$
- se $\rho = 1$, a amplitude da solução numérica se mantém quando $t \rightarrow \infty$.

Para que o operador de aproximação represente perfeitamente a resposta de um problema oscilatório não amortecido, é necessário que os autovalores de \underline{A} sejam complexos e que tenham módulo unitário, i.e.

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i = \rho e^{\pm i\theta} \quad (2.16)$$

onde

$$\begin{aligned} \rho &= |\lambda_{1,2}| \\ \theta &= \arctan \frac{\beta}{\alpha} \end{aligned} \quad (2.17)$$

A matriz $A(\Delta t)$ na maioria dos métodos de integração passo a passo, é de segunda ordem com os dois autovalores complexos conjugados. Em alguns casos, como no método de Newmark, é de terceira ordem, tendo um autovalor real e dois complexos conjugados. Nestes casos as raízes complexas, $\lambda_{1,2}$, são chamadas de raízes principais e a real, λ_3 , raiz "falsa" e $|\lambda_3| < |\lambda_{1,2}| \leq 1$.

Se $|\lambda_3| \neq 0$, introduz-se uma função exponencial na solução.

- Se para qualquer valor do intervalo de tempo utilizado, tem-se $\rho > 1$, o algoritmo é dito incondicionalmente instável;
- se $\rho \leq 1$ somente para intervalos de tempo menores que um valor crítico, o operador é dito condicionalmente estável;
- se para qualquer valor do intervalo de tempo, tem-se $\rho \leq 1$, o operador é denominado incondicionalmente estável, ainda que com $\rho < 1$ ele introduza um amortecimento artificial na solução aproximada.

Pelo teorema de Lax, desde que o módulo dos autovalores seja limitado pela unidade, o algoritmo é estável e converge quando $\Delta t \rightarrow 0$.

Dois tipos de erros são normalmente introduzidos pelos operadores de aproximação:

- erro na amplitude
- erro no período
- o erro na amplitude, tende a introduzir um amortecimento fictício na resposta do sistema, e a amplitude decai com o tempo. É o caso de $\rho < 1$.
- o erro no período, em geral, aumenta o valor do mesmo na solu-

ção numérica, e temos como medida do erro relativo no período:

$$\frac{\bar{T}-T}{T} = \frac{\omega \Delta t}{\theta} - 1 \quad (2.18)$$

onde:

\bar{T} - é o período da solução numérica

T - é o período do oscilador

θ - definido como em (2.17)

2.3.4. ESTUDO DA ESTABILIDADE

2.3.4.1. INTRODUÇÃO

Revisa-se a seguir o estudo da estabilidade de um sistema massa-mola não amortecido. No caso de um sistema com vários graus de liberdade, onde as equações de equilíbrio dinâmico são modalmente desacopláveis, pode-se obter "n" equações independentes no tempo.

Utilizando-se um algoritmo de integração passo a passo, com o mesmo intervalo de tempo para todas as "n" equações de movimento já desacopladas, tem-se uma análise equivalente a do sistema como um todo¹. Assim, pode-se analisar a estabilidade para uma das "n" equações, que têm a forma:

$$\ddot{u} + \omega^2 u = p(t) \quad (2.20)$$

Uma vez que a norma do carregamento externo é limitada, o vetor \underline{L} de (2.4) não influi na pesquisa da estabilidade do algoritmo, logo, considera-se $f(t)=0$.

2.3.4.2. MÉTODO DAS DIFERENÇAS CENTRAIS

Neste método aproximam-se as acelerações e velocidades em termos dos deslocamentos da seguinte forma:

$$\ddot{\underline{u}}_t = \ddot{\underline{u}}_n = \frac{1}{\Delta t^2} [\underline{u}_{n+1} - 2\underline{u}_n + \underline{u}_{n-1}] \quad (2.21)$$

$$\dot{\underline{u}}_t = \dot{\underline{u}}_n = \frac{1}{2\Delta t} [\underline{u}_{n+1} - \underline{u}_{n-1}] \quad (2.22)$$

Com erros da $O(\Delta t^2)$ para deslocamentos e velocidades.

Os deslocamentos no tempo $t + \Delta t$ são obtidos, substituindo-se (2.21) e (2.22) na equação de movimento para o tempo t que se escreve:

$$\underline{M} \ddot{\underline{u}}_t + \underline{C} \dot{\underline{u}}_t + \underline{K} \underline{u}_t = \underline{P}_t \quad (2.23)$$

logo:

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{\Delta t^2} \underline{M} + \frac{1}{2\Delta t} \underline{C} \right] \underline{u}_{n+1} &= \left[\underline{P}_n - \underline{K} - \frac{2}{\Delta t^2} \underline{M} \right] \underline{u}_n - \\ &- \left[\frac{1}{\Delta t^2} \underline{M} - \frac{1}{2\Delta t} \underline{C} \right] \underline{u}_{n-1} \end{aligned} \quad (2.24)$$

Para inicialização do processo de resolução, necessita-se de \underline{u}_{-1} , que é obtido a partir dos dados iniciais \underline{u}_0 , $\dot{\underline{u}}_0$, $\ddot{\underline{u}}_0$ e das relações (2.21) e (2.22) resultando

$$\underline{u}_{-1} = \underline{u}_0 - \Delta t \dot{\underline{u}}_0 + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\underline{u}}_0 \quad (2.25)$$

Se a matriz de massa e a matriz de amortecimento forem diagonais, não há necessidade de se resolver um sistema de equa

ções a cada passo, como também, pode-se trabalhar com as matrizes a nível de elemento, não sendo necessária a montagem das matrizes globais da estrutura. Em contrapartida, o algoritmo em questão é condicionalmente estável como se mostra a seguir.

Considerando-se a equação de equilíbrio dinâmico de um oscilador harmônico simples, sem amortecimento

$$\ddot{u}_t + \omega^2 u_t = p_t \quad (2.26)$$

A utilização de (2.21) e (2.22) em (2.26) permite escrever como em (2.4):

$$\begin{Bmatrix} u_{t+\Delta t} \\ u_t \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-\Omega & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_t \\ u_{t-\Delta t} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \Delta t^2 \\ 0 \end{Bmatrix} p_t \quad (2.27)$$

onde

$$\Omega = \omega^2 \Delta t^2$$

Os autovalores de \underline{A} neste caso são dados por:

$$\lambda_{1,2} = \frac{2-\Omega}{2} \pm \sqrt{\frac{(2-\Omega)^2}{4} - 1}$$

Para que $|\lambda_{1,2}| \leq 1 \Rightarrow \Delta t \leq \frac{2}{\omega}$ logo $\Delta t_{crit} \leq \frac{T}{\pi}$.

No caso de um sistema com vários graus de liberdade

$$\Delta t_{crit} \leq \frac{T_n}{\pi} \quad (2.28)$$

onde T_n é o período mínimo do modelo discreto. Com esta condição, (2.28), pode-se garantir que a parte imaginária de λ existe e a solução é oscilatória.

2.3.4.3. MÉTODO DE NEWMARK

Neste método desenvolvem-se os deslocamentos e velocidades em séries de Taylor, sendo os restos calculados aproximadamente em função de dois parâmetros livres que são fixados a posteriori a fim de garantir que o método seja estável.

Desenvolvendo-se \underline{u}_{n+1} e $\dot{\underline{u}}_{n+1}$ em torno de \underline{u}_n e $\dot{\underline{u}}_n$ respectivamente:

$$\underline{u}_{n+1} = \underline{u}_n + \Delta t \dot{\underline{u}}_n + \int_0^{\Delta t} (\Delta t - \tau) \ddot{\underline{u}}(\tau) d\tau \quad (2.29)$$

$$\dot{\underline{u}}_{n+1} = \dot{\underline{u}}_n + \int_0^{\Delta t} \ddot{\underline{u}}(\tau) d\tau \quad (2.30)$$

resolvendo-se a integral de (2.30) aproximadamente, supondo que a aceleração é uma função seccionalmente conhecida, no intervalo de 0 a Δt , Fig. 2.1, tem-se⁵:

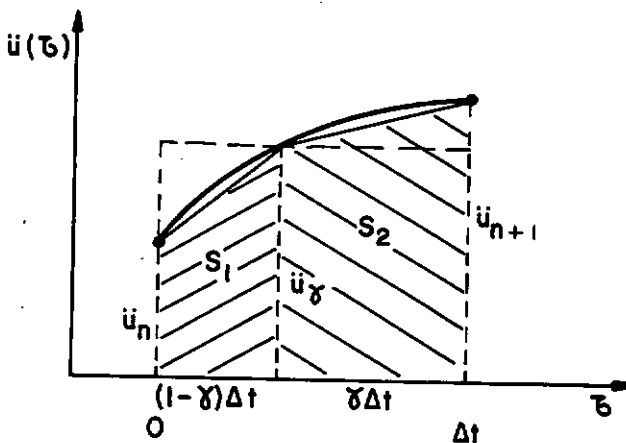


Fig. 2.1. Integração Aproximada

$$\int_0^{\Delta t} \ddot{\underline{u}}(\tau) d\tau = (1-\gamma)\Delta t \dot{\underline{u}}_n + \gamma \Delta t \dot{\underline{u}}_{n+1} \quad (2.31)$$

Procedendo-se da mesma forma para o cálculo de (2.29),
obtem-se:

$$\int_0^{\Delta t} (\Delta t - \tau) \ddot{u}(\tau) d\tau = \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \ddot{u}_n + \beta \Delta t^2 \ddot{u}_{n+1} \quad (2.31)$$

Substituindo-se (2.31) em (2.30) e (2.31) em (2.29):

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t \dot{u}_n + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \ddot{u}_n + \beta \Delta t^2 \ddot{u}_{n+1} \quad (2.32)$$

$$\dot{u}_{n+1} = \dot{u}_n + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{u}_n + \gamma \Delta t \ddot{u}_{n+1} \quad (2.33)$$

De posse das equações (2.32) e (2.33) e colocando-se o
sistema (1.1) no tempo $t + \Delta t$:

$$M \ddot{u}_{n+1} + C \dot{u}_{n+1} + K u_{n+1} = P_{n+1} \quad (2.34)$$

pode-se chegar a seguinte relação de recorrência:

$$\begin{aligned} [K + a_0 M + a_1 C] u_{n+1} &= P_{n+1} + M[a_0 u_n + a_2 \dot{u}_n + a_3 \ddot{u}_n] + \\ &+ C[a_4 u_n + a_5 \dot{u}_n] \end{aligned} \quad (2.35)$$

onde:

$$a_0 = \frac{1}{\beta \Delta t^2} ; \quad a_1 = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} ; \quad a_2 = \frac{1}{\beta \Delta t} ; \quad a_3 = \frac{1}{2\beta} - 1 ;$$

$$a_4 = \frac{\gamma}{\beta} - 1 ; \quad a_5 = \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\gamma}{\beta} - 2 \right)$$

Como se vê em (2.35) o método é implícito, uma vez que
há necessidade de se fatorar a matriz $\tilde{K} = K + a_0 M + a_1 C$.

Assim, como se viu anteriormente em 2.3.4.2, desacoplan

do-se o sistema (2.34), pode-se estudar o comportamento do algoritmo de Newmark, fazendo-se estudo da estabilidade de uma das equações desacopladas.

Considerando-se o sistema não amortecido abaixo e as relações (2.32) e (2.33), e colocando-se na forma de (2.3) tem-se:

$$\ddot{u}_{t+\Delta t} + \omega^2 u_{t+\Delta t} = p_{t+\Delta t}$$

$$\begin{Bmatrix} u_{t+\Delta t} \\ \dot{u}_{t+\Delta t} \\ \ddot{u}_{t+\Delta t} \end{Bmatrix} = \underline{\underline{A}} \begin{Bmatrix} u_t \\ \dot{u}_t \\ \ddot{u}_t \end{Bmatrix} + \underline{\underline{L}} \quad (2.36)$$

Sendo

$$\underline{\underline{A}} = \frac{1}{1+\beta\Omega} \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & \Delta t^2(\frac{1}{2} - \beta) \\ -\gamma\Omega/\Delta t & 1+\Omega(\beta-\gamma) & \Delta t[(1-\gamma)+\Omega(\beta-\frac{\gamma}{2})] \\ -\Omega/\Delta t^2 & -\Omega/\Delta t & -\Omega(\frac{1}{2} - \beta) \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{L}} = \begin{Bmatrix} \frac{\alpha\beta}{\omega^2} \\ \frac{\beta\delta}{\omega^2\Delta t} \\ \frac{\beta}{\Omega} \end{Bmatrix}$$

Calculando-se os autovalores de $\underline{\underline{A}}$:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 + [\beta - \frac{1}{2}(\gamma + \frac{1}{2})]\Omega \pm i\{[\beta - \frac{1}{4}(\gamma + \frac{1}{2})^2]\Omega^2 + \Omega\}^{1/2}}{1 + \beta\Omega}$$

$$\lambda_3 = 0$$

Para que $|\lambda_{1,2}| = 1$:

$$1 + \{1 + 2[\beta - \frac{1}{2}(\gamma + \frac{1}{2})]\Omega + [\beta + \beta^2 - \beta(\gamma + \frac{1}{2})]\Omega^2\} = 1 + 2\beta\Omega + \beta^2\Omega^2$$

Igualando-se os termos Ω e Ω^2 , tem-se:

$$1 + 2\beta - (\gamma + \frac{1}{2}) = 2\beta \Rightarrow \gamma = \frac{1}{2} \quad (2.37)$$

e

$$\beta + \beta^2 - \beta(\gamma + \frac{1}{2}) = \beta^2 \Rightarrow \beta(\frac{1}{2} - \gamma) = 0$$

Logo, com $\gamma = \frac{1}{2}$, garante-se que os autovalores têm módulo unitário. Para que a solução seja oscilatória ($b > 0$):

$$[\beta - \frac{1}{4} (\gamma + \frac{1}{2})^2] \Omega^2 + \Omega > 0$$

para $\gamma = \frac{1}{2}$:

$$f(\Omega) = (\beta - \frac{1}{4}) \Omega^2 + \Omega > 0 \quad (2.38)$$

A expressão à esquerda do sinal de desigualdade, representa uma parábola que tem por raízes:

$$\Omega_1 = 0$$

$$\Omega_2 = - \frac{1}{\beta - \frac{1}{4}}$$

Como $\Omega = \omega^2 \Delta t^2 > 0$, para que $f(\Omega) > 0$, tem-se que, para qualquer valor positivo de Ω , Ω_2 deverá ser sempre menor que zero como mostra Fig. 2.2.

Para que ocorram as condições acima citadas, é necessário que:

$$\beta \geq \frac{1}{4} (\gamma + \frac{1}{2})^2 \quad (2.39)$$

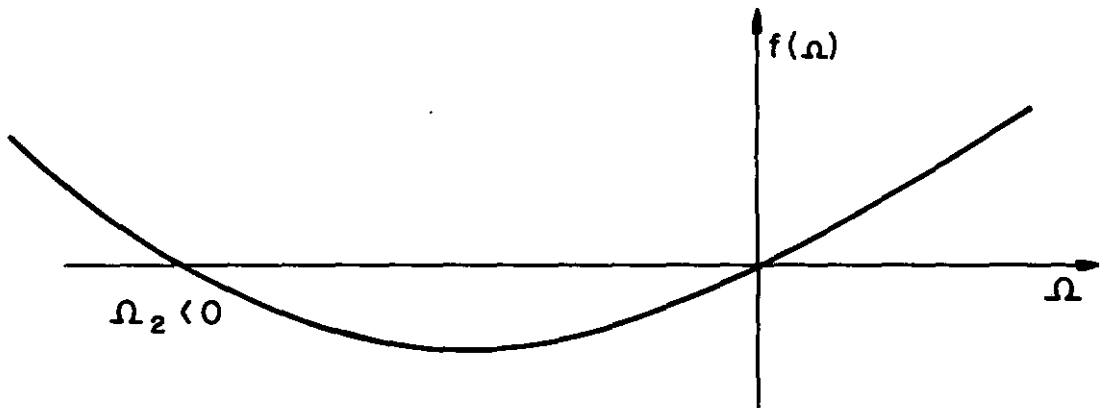


Fig. 2.2

Com as condições (2.37) e (2.39) garante-se que o método não introduz amortecimento artificial e é incondicionalmente estável.

Variando-se os valores de β , obtêm-se os métodos:

$$\beta = \frac{1}{2} \quad - \text{Fox e Goodwin}$$

$$\beta = \frac{1}{6} \quad - \text{método das acelerações lineares}$$

$$\beta = \frac{1}{4} \quad - \text{método das acelerações médias}$$

Dos erros comentados anteriormente no item 2.3.3 o método de Newmark com $\gamma = \frac{1}{2}$ não introduz erros nas amplitudes e o erro no período é mostrado na Fig. 2.4.

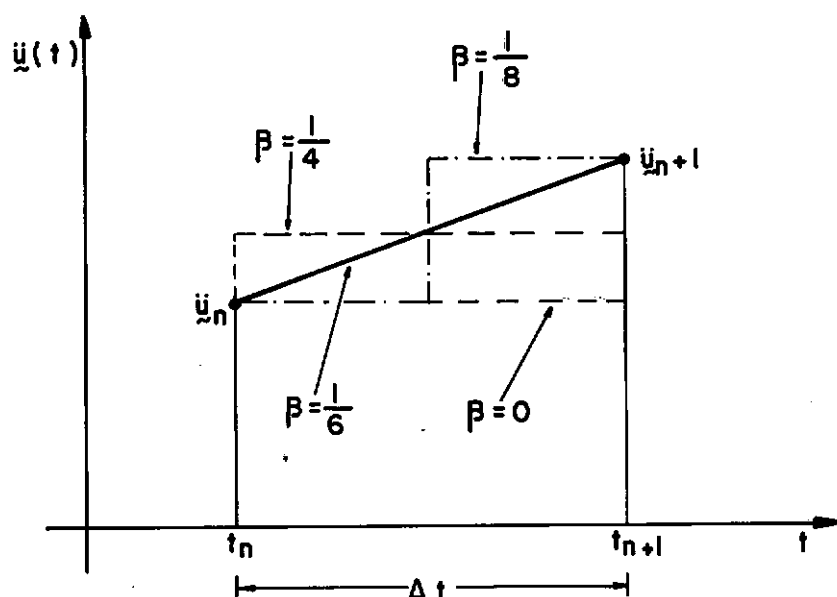
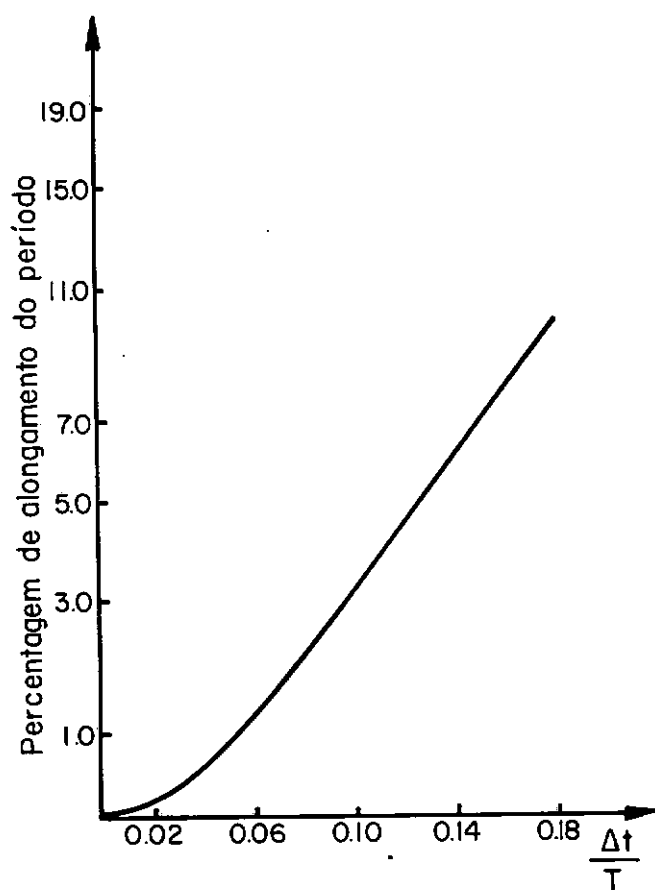
Fig. 2.3. Significado do parâmetro β 

Fig. 2.4. Variação do período

CAPÍTULO III

ALGORITMO DE DIFERENÇA CENTRAL

3.1. INTRODUÇÃO

Apesar de ser condicionalmente estável quando aplicado a problemas lineares, a facilidade de implementação e o custo computacional, sugerem o emprego do algoritmo de diferença central a sistemas não lineares, sobretudo em problemas de propagação de ondas, onde o intervalo de tempo a ser utilizado já é, por definição, relativamente pequeno.

Como será visto mais detalhadamente no próximo capítulo, o estudo da estabilidade quando se trata de problemas que envolvem algum tipo de não linearidade, deve ser feito definindo-se estabilidade na energia. Estuda-se nestes casos, para um determinado algoritmo, como a energia de um sistema em um certo instante, se comporta em relação à energia do instante anterior.

3.2. ESTABILIDADE

A forma mais simples de se fazer o estudo da estabilidade na energia para o algoritmo de diferença central é partir do sistema de equações de equilíbrio dinâmico, pré-multiplicado por um vetor de velocidades. Desta forma pode-se verificar como a energia total em um determinado tempo " $t+\Delta t$ " é limitada pela energia total do tempo " t ".

Vários autores^{11,17} fizeram este desenvolvimento, che -

gando a resultados contraditórios.

Belytschko, Holmes e Mullen¹⁷, consideraram grandes deslocamentos e Park¹¹ aborda apenas o caso de não linearidade física.

O desenvolvimento aqui apresentado e que pretende esclarecer melhor este procedimento é feito para materiais elásticos não lineares.

Sendo o sistema de equações:

$$\underline{M} \ddot{\underline{u}}_t + \underline{F}(\underline{u}_t) = 0 \quad (3.1)$$

e, definindo-se:

- o vetor de deformações como

$$\underline{\epsilon} = \underline{B} \underline{u} \quad (3.2)$$

- o vetor de forças equivalentes ao estado de deformação atual como:

$$\underline{F}(\underline{u}) = \int_V \underline{B}^T \underline{\sigma} dV \quad (3.3)$$

e, matriz de rigidez tangente, como:

$$\underline{K} = \int_V \underline{B}^T \frac{\partial \underline{\sigma}}{\partial \underline{\epsilon}} \underline{B} dV \quad (3.4)$$

sendo $\underline{\sigma}$ o estado de tensões.

Sabe-se^{11,17} que a frequência máxima, ω_{\max} , tem a seguinte limitação:

$$\dot{\underline{u}}^T \underline{K} \dot{\underline{u}} \leq \omega_{\max}^2 \dot{\underline{u}}^T \underline{M} \dot{\underline{u}} \quad (3.5)$$

tomando-se a equação (3.1) e multiplicando-a por $\dot{\underline{u}}_t = (\underline{u}_{t+\Delta t} - \underline{u}_{t-\Delta t})/2\Delta t$, tem-se:

$$\dot{\underline{u}}_t^T \underline{M} \ddot{\underline{u}}_t + \dot{\underline{u}}_t^T \underline{F}(\underline{u}_t) = 0 \quad (3.6)$$

devido a simetria de \underline{M} pode-se afirmar que:

$$\dot{\underline{u}}_t^T \underline{M} \ddot{\underline{u}}_t = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{\underline{u}}_t^T \underline{M} \dot{\underline{u}}_t \right) = \frac{d}{dt} (T_t)$$

sendo T_t a energia cinética no tempo "t". Aproximando-se $\frac{d}{dt} (T_t)$ por uma fórmula de diferença central:

$$\dot{\underline{u}}_t^T \underline{M} \ddot{\underline{u}}_t = \frac{T_{t+\Delta t/2} - T_{t-\Delta t/2}}{\Delta t} \quad (3.7)$$

No desenvolvimento do termo $\dot{\underline{u}}_t^T \underline{F}(\underline{u}_t)$ da equação 3.6 admite-se que exista uma função potencial, $\phi = \phi(\underline{\varepsilon})$, tal que a energia de deformação, seja definida como:

$$U = \int_V \phi(\underline{\varepsilon}) dV$$

Expandindo-se $\phi(\underline{\varepsilon}_{t+\Delta t})$ e $\phi(\underline{\varepsilon}_{t-\Delta t})$ em série de Taylor em torno de $\phi(\underline{\varepsilon}_t)$ tem-se:

$$\phi_{t+\Delta t} = \phi_t + \left. \frac{\partial \phi}{\partial \underline{\varepsilon}} \right|_{\Delta \underline{\varepsilon} = 0} \Delta \underline{\varepsilon}_1^T + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial \underline{\varepsilon}^2} \right|_{\Delta \underline{\varepsilon} = 0} \Delta \underline{\varepsilon}_1 \Delta \underline{\varepsilon}_1^T \quad (3.8)$$

$$\phi_{t-\Delta t} = \phi_t - \left. \frac{\partial \phi}{\partial \underline{\varepsilon}} \right|_{\Delta \underline{\varepsilon} = 0} \Delta \underline{\varepsilon}_2^T + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial \underline{\varepsilon}^2} \right|_{\Delta \underline{\varepsilon} = 0} \Delta \underline{\varepsilon}_2 \Delta \underline{\varepsilon}_2^T \quad (3.9)$$

integrando-se (3.8) e (3.9) ao longo do volume e notando que

$$\frac{\partial \phi}{\partial \underline{\varepsilon}_t} = \underline{\sigma}_t, \text{ tem-se:}$$

$$U_{t+\Delta t} = U_t + \int_V \underline{\sigma}_t^T (\underline{\varepsilon}_{t+\Delta t} - \underline{\varepsilon}_t) dV + \frac{1}{2} \int_V (\underline{\varepsilon}_{t+\Delta t} - \underline{\varepsilon}_t)^T \frac{\partial \underline{\sigma}}{\partial \underline{\varepsilon}_t} (\underline{\varepsilon}_{t+\Delta t} - \underline{\varepsilon}_t) dV \quad (3.10)$$

$$U_{t-\Delta t} = U_t - \int_V \underline{\sigma}_t^T (\underline{\varepsilon}_t - \underline{\varepsilon}_{t-\Delta t}) dV + \frac{1}{2} \int_V (\underline{\varepsilon}_t - \underline{\varepsilon}_{t-\Delta t})^T \frac{\partial \underline{\sigma}}{\partial \underline{\varepsilon}_t} (\underline{\varepsilon}_t - \underline{\varepsilon}_{t-\Delta t}) dV \quad (3.11)$$

Subtraindo-se (3.10) de (3.11) e dividindo-se por $2\Delta t$:

$$\begin{aligned} \frac{U_{t+\Delta t} - U_{t-\Delta t}}{2\Delta t} &= \frac{1}{2\Delta t} \left\{ \int_V (\underline{\varepsilon}_{t+\Delta t} - \underline{\varepsilon}_{t-\Delta t})^T \underline{\sigma}_t dV + \right. \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_V [(\underline{\varepsilon}_t - \underline{\varepsilon}_{t-\Delta t})^T \frac{\partial \underline{\sigma}}{\partial \underline{\varepsilon}_t} (\underline{\varepsilon}_{t+\Delta t} - \underline{\varepsilon}_t) - \\ &\quad \left. - (\underline{\varepsilon}_t - \underline{\varepsilon}_{t-\Delta t})^T \frac{\partial \underline{\sigma}}{\partial \underline{\varepsilon}_t} (\underline{\varepsilon}_t - \underline{\varepsilon}_{t-\Delta t})] dV \right\} \quad (3.12) \end{aligned}$$

Substituindo-se (3.2) e (3.4) em (3.12) e rearranjando-se os termos:

$$\begin{aligned} \frac{U_{t+\Delta t} - U_{t-\Delta t}}{2\Delta t} &= \ddot{u}_t \int_V \underline{B}^T \underline{\sigma}_t dV + \frac{\Delta t}{4} \left(\frac{\underline{u}_{t+\Delta t} - \underline{u}_t}{\Delta t} \right)^T \underline{K} \left(\frac{\underline{u}_{t+\Delta t} - \underline{u}_t}{\Delta t} \right) - \\ &\quad - \frac{\Delta t}{4} \left(\frac{\underline{u}_t - \underline{u}_{t-\Delta t}}{\Delta t} \right)^T \underline{K} \left(\frac{\underline{u}_t - \underline{u}_{t-\Delta t}}{\Delta t} \right) \quad (3.13) \end{aligned}$$

o termo do lado esquerdo da igualdade é uma aproximação para

$\dot{U}_t = (U_{t+\Delta t} - U_{t-\Delta t}) / 2\Delta t$. Uma outra aproximação possível seria:

$$\dot{U}_t = \frac{U_{t+\Delta t/2} - U_{t-\Delta t/2}}{\Delta t} \quad (3.14)$$

Substituindo-se as relações (3.3) e (3.14) em (3.13), obtem-se:

$$\begin{aligned} \dot{u}_t F(u_t) = & \frac{1}{\Delta t} (u_{t+\Delta t/2} - u_{t-\Delta t/2}) - \frac{\Delta t}{4} \left(\frac{u_{t+\Delta t} - u_t}{\Delta t} \right)^T K \left(\frac{u_{t+\Delta t} - u_t}{\Delta t} \right) + \\ & + \frac{\Delta t}{4} (u_t - u_{t-\Delta t})^T K(u_t - u_{t-\Delta t}) \end{aligned} \quad (3.15)$$

e agora, (3.15) e (3.7) podem ser substituídas em (3.6) para dar:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} (T_{t+\Delta t/2} - T_{t-\Delta t/2}) + \frac{1}{\Delta t} (u_{t+\Delta t/2} - u_{t-\Delta t/2}) = \\ = \frac{\Delta t}{4} \left(\frac{u_{t+\Delta t} - u_t}{\Delta t} \right)^T K \left(\frac{u_{t+\Delta t} - u_t}{\Delta t} \right) - \\ - \frac{\Delta t}{4} \left(\frac{u_t - u_{t-\Delta t}}{\Delta t} \right)^T K \left(\frac{u_t - u_{t-\Delta t}}{\Delta t} \right) \end{aligned} \quad (3.16)$$

De posse da relação (3.5) e sabendo-se que o último termo de (3.16) é sempre positivo definido, tem-se:

$$\begin{aligned} T_{t+\Delta t/2} - T_{t-\Delta t/2} + u_{t+\Delta t/2} - u_{t-\Delta t/2} \leq \\ \leq \frac{\Delta t^2}{2} \omega_{t_{\max}}^2 T_{t+\Delta t/2} \end{aligned}$$

ou:

$$\left(1 - \frac{\Delta t^2}{2} \omega_{t_{\max}}^2 \right) T_{t+\Delta t/2} + u_{t+\Delta t/2} \leq T_{t-\Delta t/2} + u_{t-\Delta t/2} \quad (3.17)$$

Numa tentativa de se limitar energia total em um determinado instante, pela do instante anterior, ou seja, para que:

$$T_{t+\Delta t/2} + U_{t+\Delta t/2} \leq T_{t-\Delta t/2} + U_{t-\Delta t/2}$$

deve-se garantir que:

$$1 - \frac{\Delta t^2}{2} \omega_{t_{\max}}^2 > 0$$

ou:

$$\Delta t < \frac{\sqrt{2}}{\omega_{t_{\max}}} \quad (3.18)$$

que é uma estimativa para o limite de estabilidade do algoritmo de diferença central, para materiais elásticos não lineares.

No caso não linear para se garantir a estabilidade durante todo o processo, esta frequência máxima do modelo discreto, tem que ser a máxima frequência local encontrada em todo o domínio $0 \leq t \leq T$.

Procedimentos de integração explícita com intervalo de tempo variável têm sido propostos por diversos autores, entre eles Park e Underwood^{31, 37}.

No presente trabalho não se fará nenhuma consideração deste tipo, tentando-se apenas, através de exemplos numéricos, colher dados sobre os atrativos do método quando aplicado a problemas não lineares.

3.3. UMA APROXIMAÇÃO PARA ΔT_{CRIT}

Vários autores^{13, 17, 19, 22, 23} sugerem uma aproximação do intervalo de tempo crítico do problema linear, baseado no menor tempo que uma determinada onda leva para se propagar entre dois

pontos nodais de um elemento.

Holmes e Belytschko¹³, provam que para uma barra subdividida em elementos de comprimento " ℓ " e com ambas as extremidades livres, que:

$$\omega_n^2 = \frac{4}{\ell^2} c^2$$

sendo " c ", a velocidade da onda, dada por:

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

onde E é o módulo de elasticidade, ρ a densidade do material e ω_n a mais alta frequência do modelo discreto.

Desta forma, como $\Delta t_{crit} \leq \frac{2}{\omega}$, pode-se dizer

$$\Delta t_{crit} \leq \frac{\ell}{c} \quad (3.19)$$

Afirmam ainda que, se a barra for subdividida em elementos de tamanhos diferentes, uma aproximação para ω_n poderá ser obtida, tomando-se para " ℓ ", o comprimento do menor elemento.

Se o sistema é constituído de uma malha de elementos de campo de deslocamentos linear, os resultados numéricos comprovam que pode-se tomar " ℓ " como sendo a menor distância entre dois nós consecutivos do elemento e " c ", a velocidade da onda longitudinal, que para casos de deformação plana, é dada por:

$$c = \sqrt{\frac{E(1-\mu)}{\rho(1+\mu)(1-2\mu)}} \quad (3.20)$$

sendo μ o coeficiente de Poisson.

Baseados também, em dados empíricos, sugerem que para elementos quadráticos, se multiplique o valor encontrado para $\Delta t \leq \frac{\lambda}{c}$ por um coeficiente γ .

No trabalho de Chang et al²³ o valor de γ é sugerido variar entre 0.2 e 0.6 para elementos quadráticos e de 0.9 a 1.0 para elementos lineares.

Nos exemplos analisados no final do capítulo, faz-se uma comparação entre os intervalos de tempo em função das frequências calculadas para o modelo discreto e o valor deste intervalo, em função do tempo que uma onda longitudinal leva para percorrer o elemento.

3.4. VERIFICAÇÃO DA INSTABILIDADE

Neste item, procura-se tecer algumas considerações sobre um tipo de instabilidade numérica que pode ocorrer em problemas não lineares bem como a forma de alertar ao usuário se em algum instante da análise esse tipo de instabilidade perturbou os resultados obtidos.

Isto se faz necessário, uma vez que em estruturas de comportamento vibratório envolvendo materiais elásticos não lineares ou inelásticos, esta instabilidade pode ser mascarada, não sendo desta forma, tão facilmente detectada. Shantaram²² afirma que, problemas deste tipo, podem ocorrer com materiais dissipativos como o solo ou metais elastoplásticos.

Nestes casos, a energia gerada pela instabilidade numérica pode ser dissipada e os deslocamentos podem não crescer sem limites, gerando respostas aparentemente bem comportadas mas com

erros que podem atingir a mais de 100%.

Este tipo de instabilidade é chamado de instabilidade limitada (arrested instability) e um exemplo ilustrativo é mostrado na Fig. 3.1.

Neste exemplo, em que Δt_{crit} calculado para $k=9 \times 10^8$ é:

$$\Delta t_{crit} = \frac{2}{\omega_{max}} = 0.00106$$

ocorre uma solução "instável" para $\Delta t=0.001$.

Neste caso, em que o material não é dissipativo, a dissipação de energia, que manteve a resposta limitada, deve-se a problemas na aproximação da curva não linear.

No Apêndice A, esclarece-se melhor o erro cometido nesta aproximação.

Em vista da dificuldade de se detectar este erro e de como se precisar o intervalo de tempo crítico numa análise não linear, Belytschko, Chiapetta e Bartel⁴⁰ propuseram que se verificasse a "identidade fundamental da energia", que todo problema de valor inicial deve satisfazer, ou seja, dado o problema de valor inicial

$$M \ddot{u}_t + F(u_t) = P(t)$$

e,

$$u(0) = 0$$

$$\dot{u}(0) = 0$$

então, como $E_0 = 0$

$$E_t = W_t$$

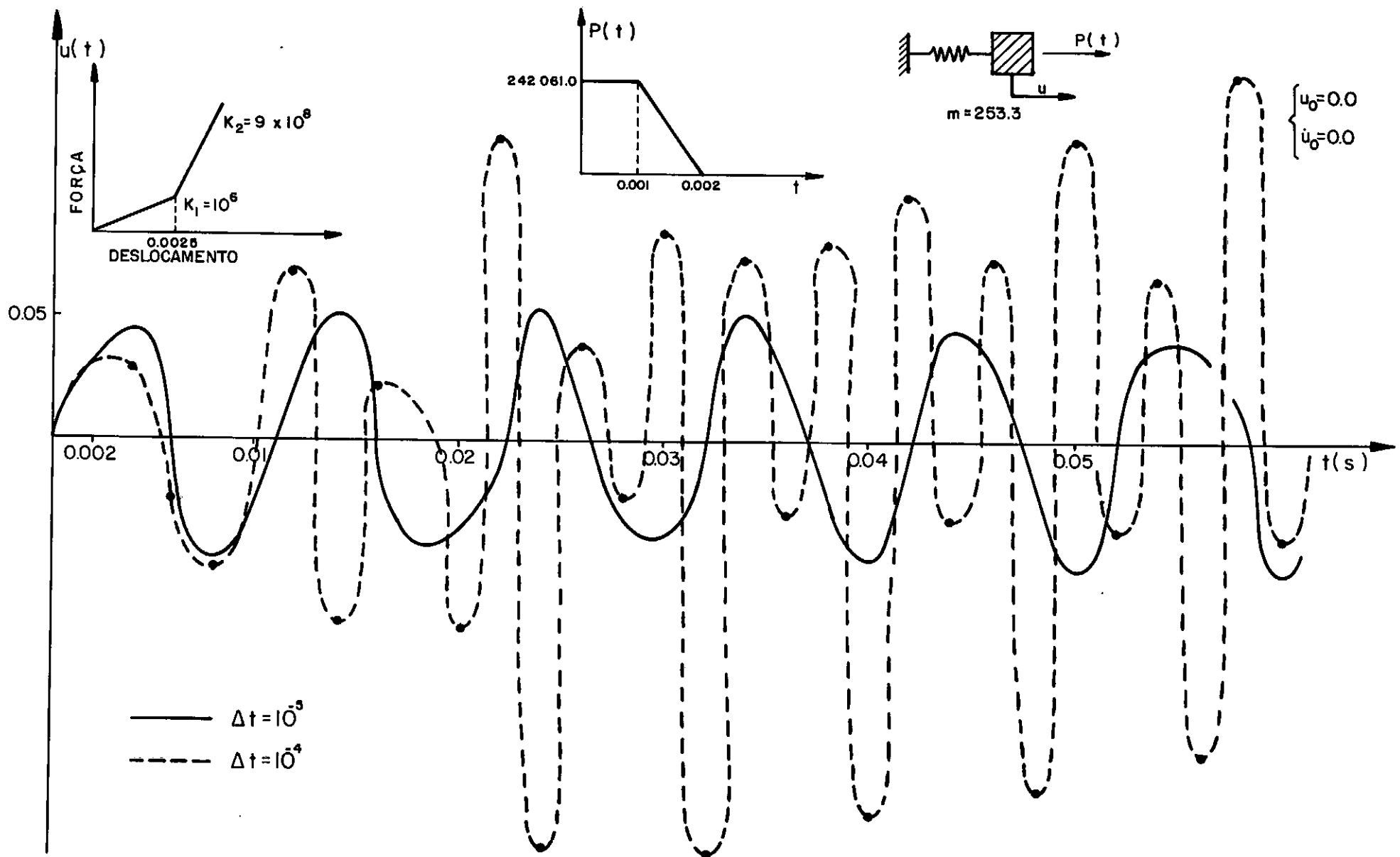


Figura 3.1

e,

$$E_t = T_t + U_t$$

sendo:

E_t - a energia total no tempo t

T_t - a energia cinética no tempo t

U_t - a energia de deformação no tempo t

W_t - o trabalho mecânico das forças externas durante o intervalo $(0, t)$

A energia cinética é calculada como:

$$T_t = \frac{1}{2} \dot{\underline{u}}_t^T \underline{M} \dot{\underline{u}}_t$$

Partindo-se da equação (3.10) definiu-se a "energia interna discreta" como:

$$U_{t+\Delta t} = U_t + \frac{1}{2} \int_V \Delta \underline{\epsilon}_t^T (\underline{\sigma}_{t+\Delta t} + \underline{\sigma}_t) dV \quad (3.21)$$

sendo $\Delta \underline{\epsilon}_n$ a variação da deformação durante um intervalo de tempo, isto é,

$$\Delta \underline{\epsilon}_t = \underline{\epsilon}_{t+\Delta t} - \underline{\epsilon}_t$$

A equação (3.21) representa a integração trapezoidal da curva tensão-deformação não linear.

Substituindo as equações (3.2) e (3.3) na equação (3.21), tem-se:

$$U_{t+\Delta t} = U_t + \frac{1}{2} (\underline{u}_{t+\Delta t} - \underline{u}_t) (\underline{F}_{t+\Delta t} + \underline{F}_t)$$

e, da mesma forma:

$$W_{t+\Delta t} = W_t + \frac{1}{2} (\underline{u}_{t+\Delta t} - \underline{u}_t)(\underline{p}_{t+\Delta t} + \underline{p}_t)$$

Admitindo-se um sistema não amortecido e que a energia inicial \bar{E} é nula; e, chamando-se de resíduo de energia a

$$R = E_t - W_t ,$$

então se este valor não for nulo, mas for menor que uma certa porcentagem da energia total, admite-se que o valor encontrado deve-se a algum erro de arredondamento ou integração, caso contrário, admite-se que houve geração de energia devido a uma instabilidade numérica.

A verificação do balanço de energia sugerido, toma então a seguinte forma:

$$\text{Se } E_0 = 0 , \quad R \leq \beta E_t$$

ou,

$$\lambda = \frac{R}{E_t} = \frac{E_t - W_t}{E_t} \leq \beta \quad (3.22)$$

sendo β a tolerância adotada.

Belytschko, Chiapetta e Bartell⁴⁰ sugerem que se faça esta verificação cada 1000 ou até 5000 intervalos de tempo e que, o resíduo de energia não ultrapasse a 2% da energia total, isto é, $\beta \leq 0.02$, sendo U_t e W_t calculados a cada incremento de tempo e a energia cinética calculada quando se efetua esta verificação.

Pelos exemplos analisados concluiu-se que compensa fazer esta verificação de 10 a no máximo 500 intervalos de tempo,

dependendo do problema em questão, uma vez que o esforço numérico dispendido no cálculo da energia cinética e no valor de λ , não é excessivo, principalmente se comparado ao esforço desnecessário a ser gasto, quando ao fim de 1000 intervalos de tempo fosse identificada uma instabilidade. Um outro aspecto que justifica esta opção, é o fato da energia gerada pela instabilidade poder ser dissipada. Assim, ao se fazer um número menor de verificações, corre-se o risco deste teste estar sendo feito em pontos onde o valor de λ satisfaz a equação (3.22).

No entanto, como é constatado no Exemplo II, em tempos anteriores pode-se encontrar valores de λ muito superiores ao permitido.

3.5. EXEMPLOS

Foram analisados três exemplos típicos:

- simulação de cravação de uma estaca
- treliça espacial sugerida por Noor e Peters
- estado plano de tensões com discretização por elementos finitos isoparamétricos, com equação constitutiva elastoplástica.

3.5.1. EXEMPLO I

O primeiro exemplo analisado, corresponde a simulação da cravação de uma estaca. Suas características, bem como, os parâmetros das curvas não lineares do solo e o carregamento externo, estão apresentados na Figura 3.2.

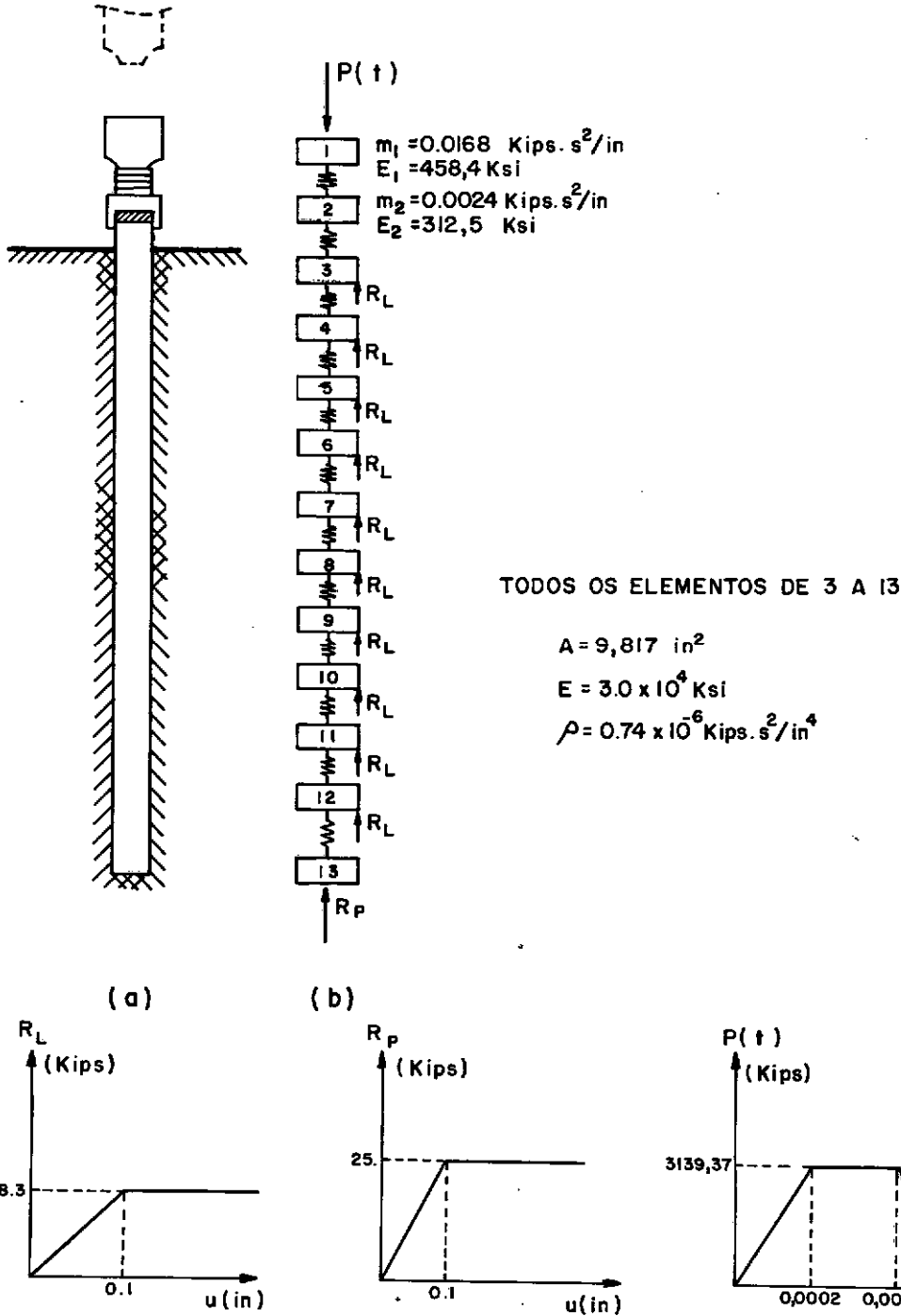


Figura 3.2

A estaca foi discretizada em 12 elementos de treliça e foi encontrado para período fundamental, $4.696 \times 10^{-2} \text{ s}$ e para período mínimo, $1.3512 \times 10^{-3} \text{ s}$. Dessa forma $\Delta t_{\text{crit}} = \frac{T_n}{\pi} = 4.301 \times 10^{-4} \text{ s}$.

A aproximação deste intervalo de tempo, em função da velocidade de onda, como dado no item 3.3 é:

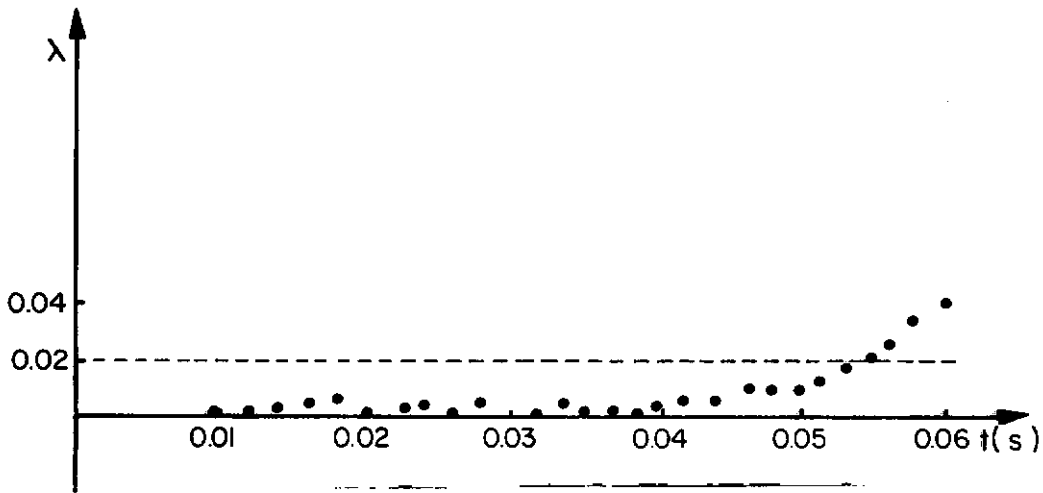


Figura 3.3

$$\overline{\Delta t} = \Delta t_{crit} = 4.778 \times 10^{-4} s, \text{ para } \ell = 96m$$

Foram feitas comparações para os seguintes intervalos de tempo: 0.000125s; 0.00025s; 0.0004s e 0.0004301s.

Os gráficos apresentados nas Figuras 3.4 e 3.5, mostram os deslocamentos na extremidade inferior da estaca e as forças na barra 3 respectivamente.

Os resultados de deslocamentos e forças para os intervalos de tempo de 0.000125s e 0.00025s, forneceram a mesma aproximação e para $\Delta t = 0.0004s$, forças e deslocamentos foram praticamente coincidentes com os dois primeiros. Para $\Delta t = \Delta t_{crit} = 0.0004301s$ os resultados de deslocamentos parecem satisfatórios até $\Delta t = 0.06s$, a partir daí, começam a crescer sem limites. No entanto, para forças, a solução já começa a se deteriorar entre 0.04 e 0.05s.

O valor de λ permaneceu menor que o permitido (0.02) até $\Delta t = 0.05s$. A partir daí, assumiu valores inaceitáveis até o final do processo (Figura 3.3). Conclui-se daí que o critério adotado, detectou a instabilidade.

Numa tentativa de se avaliar a eficiência do processo foram medidos os tempos de processamento (C.P.U.) obtidos com λ calculado a cada 1, 10 e 100 intervalos de tempo, em relação ao tempo de C.P.U. quando não se faz verificação de λ .

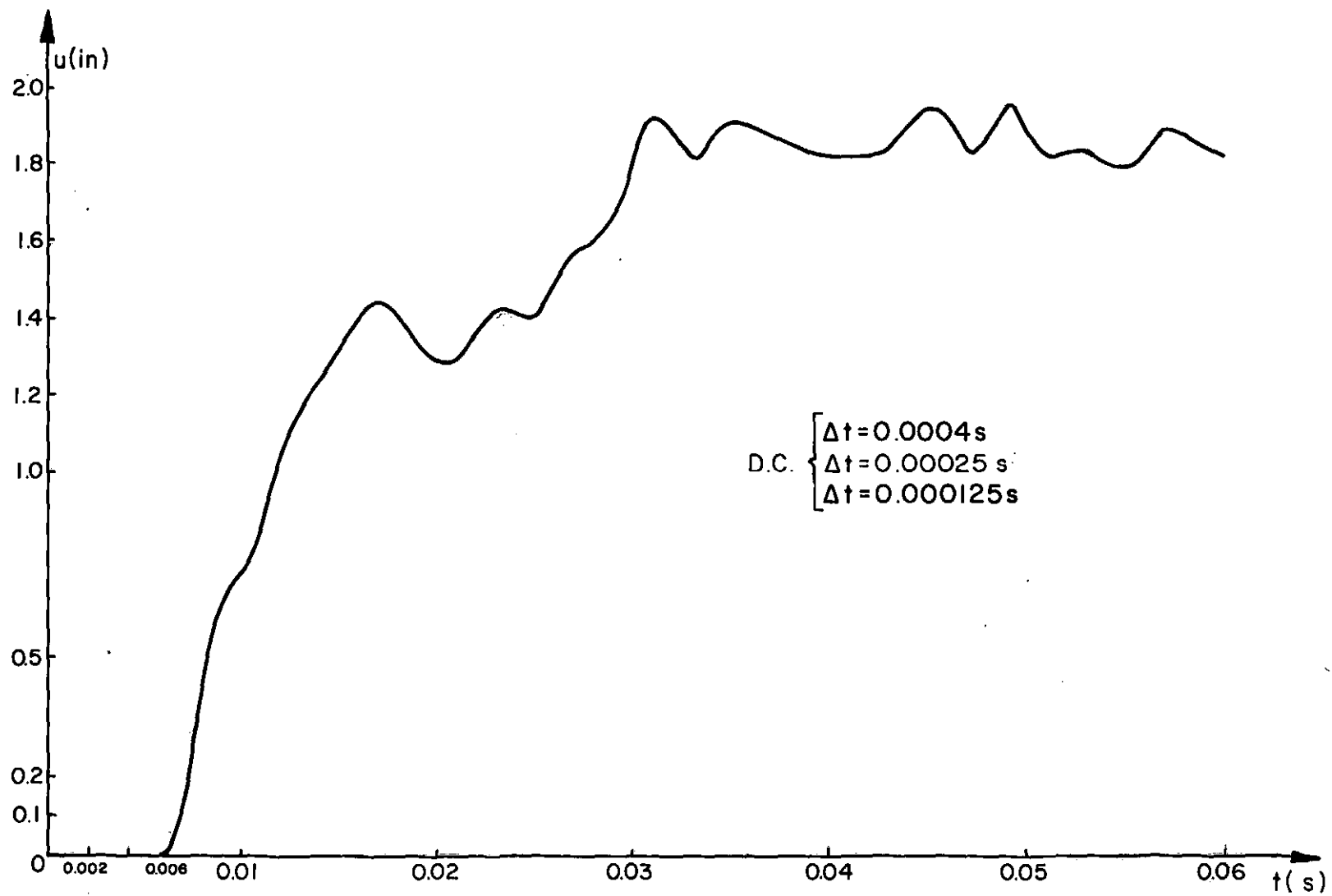


Figura 3.4

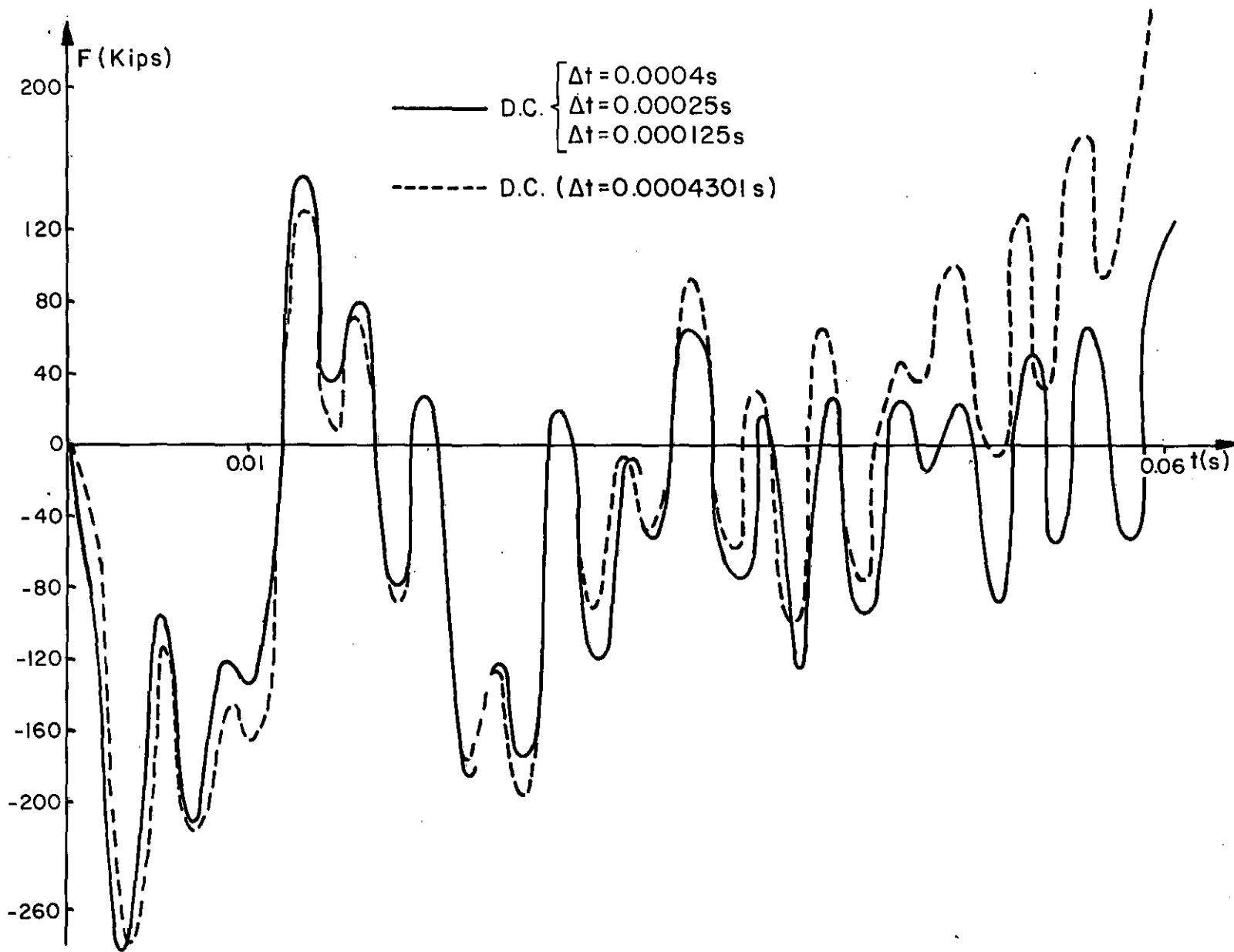


Figura 3.5

Sem Verificação	1,0
Verificação a cada $100\Delta t$	1,03
$10\Delta t$	1,05
$1\Delta t$	1,08

3.5.2. EXEMPLO II

O exemplo analisado a seguir, é uma treliça espacial com deslocamentos impedidos nos extremos e com quatro cargas iguais, aplicadas nos nós centrais, como mostra a Figura 3.6. Este exemplo foi sugerido por Noor e Peters²¹, embora os resultados aqui obtidos, não possam ser comparados com os do trabalho acima citado, uma vez que este considerou não linearidade física, e neste caso, considera-se somente o problema da não linearidade geométrica.

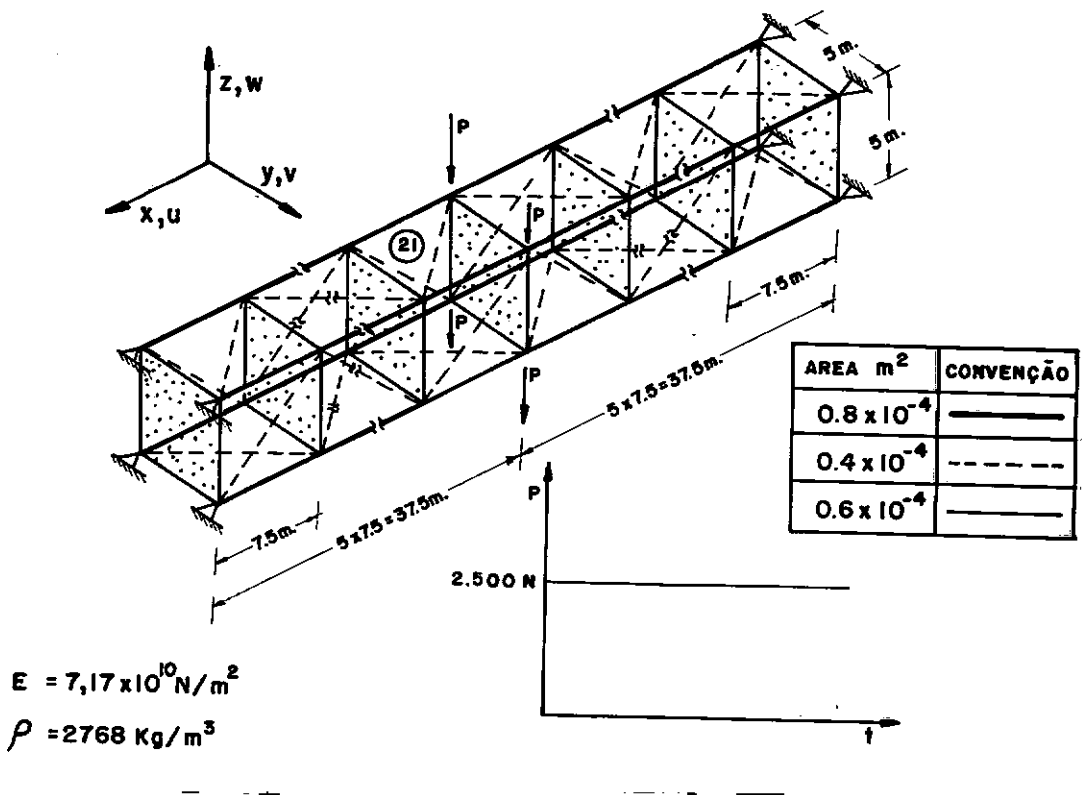


Figura 3.6

O menor período de vibração linear da treliça é:

$$T_n = 5.98 \times 10^{-3} \text{ s} ,$$

dessa forma, $\Delta t_{\text{crit}} = \frac{T_n}{\pi} \approx 1.91 \times 10^{-3} \text{ s}.$

Fazendo-se a aproximação para o intervalo de tempo, como citado no item 3.3 e que estabelece:

$$\overline{\Delta t} = \frac{\ell}{c} \sqrt{\frac{\rho}{E}} \ell$$

e tomando-se por ℓ o comprimento da menor barra, o valor encontrado é:

$$\overline{\Delta t} = 0.982 \times 10^{-3} \text{ s} .$$

Pode-se notar, que este $\overline{\Delta t}$ é um valor conservador, comparado com o limite de estabilidade do problema linear.

A seguir, apresentam-se nas Figuras 3.7, 3.8 e 3.9 os deslocamentos verticais do nó 21 e das forças na barra 29 e 21 respectivamente. Os resultados obtidos com $\Delta t = 0.0002 \text{ s}$ e $\Delta t = 0.0018 \text{ s}$, são praticamente coincidentes. Com $\Delta t = 0.00195 \text{ s}$, que é um intervalo de tempo ligeiramente maior que Δt_{crit} , para deslocamentos, obteve-se um resultado que poderia ser considerado satisfatório, notando-se uma ligeira discrepância a partir de 0.6 s . No entanto, o erro nas forças, e logo, nas tensões nas barras são inaceitáveis.

A Figura 3.10 mostra o valor de λ descrito no item 3.4. Até 0.6 s , este valor é praticamente nulo para os intervalos de tempo 0.0002 s , 0.0018 s e 0.00195 s . A partir de $t = 0.4 \text{ s}$, o valor de λ para $\Delta t = 0.00195 \text{ s}$ começa a crescer atingindo valores da ordem de $0,98$ o que significa um acréscimo de 98% da energia em relação ao

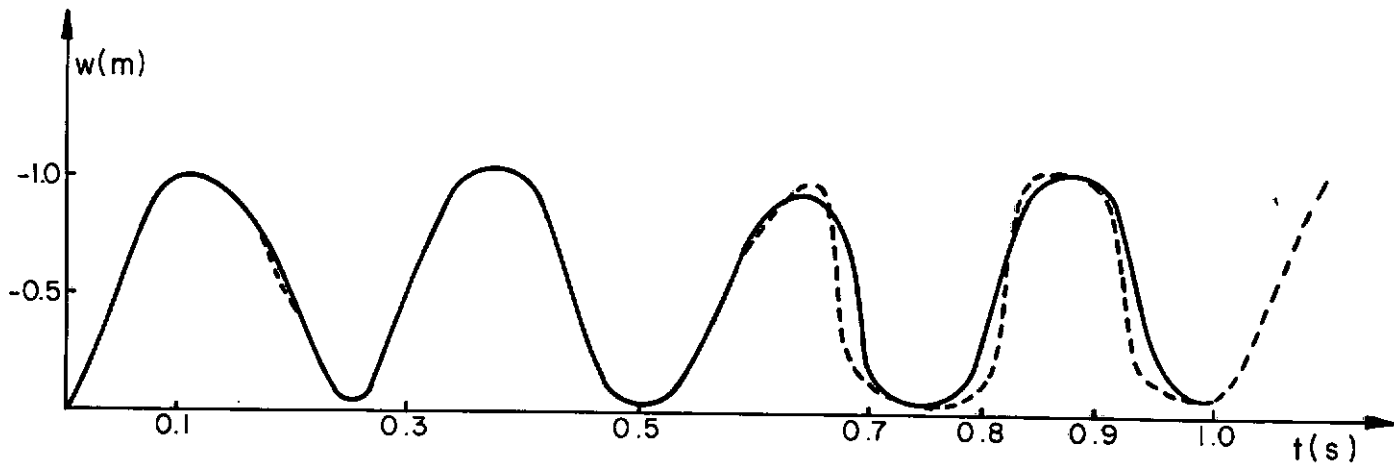


Figura 3.7

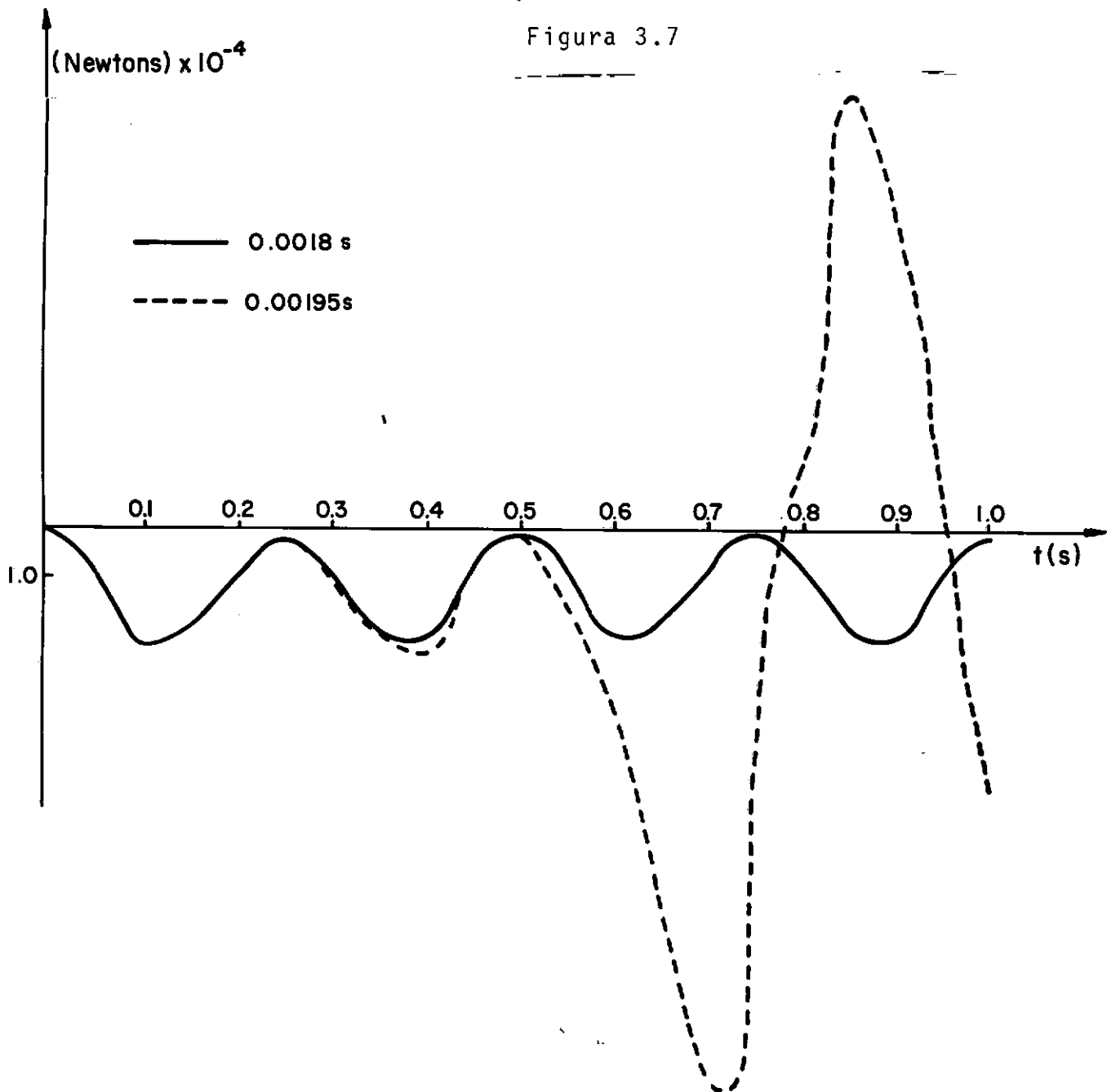


Figura 3.8

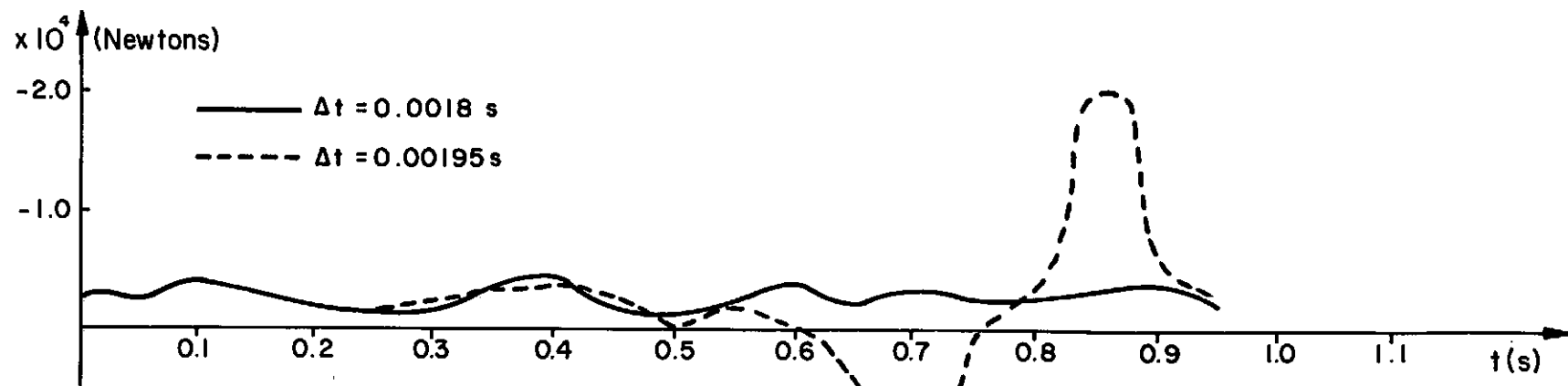


Figura 3.9

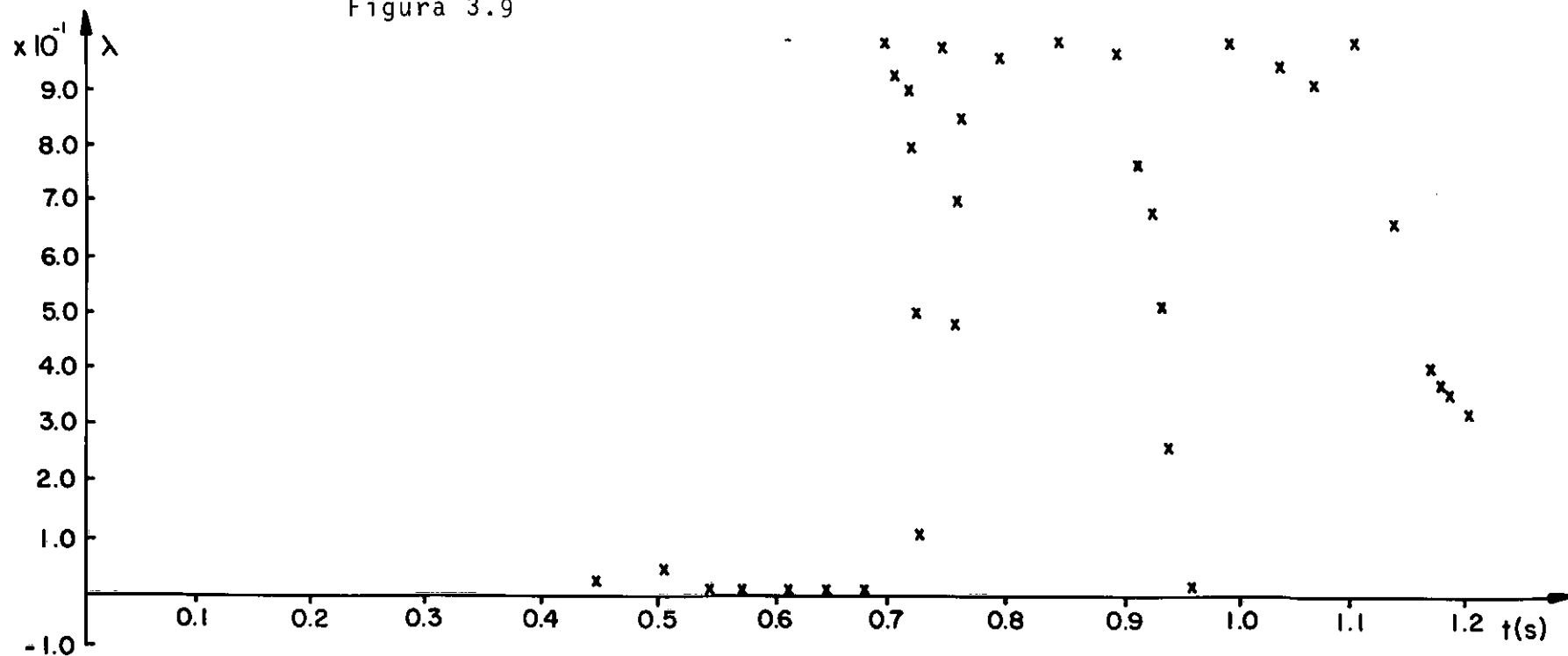


Figura 3.10

passo anterior. Como o material não é dissipativo o decréscimo de energia mostrado na Figura 3.10 deve-se provavelmente a erros na aproximação da função não linear. Quando há enrijecimento, o erro na integração se torna mais grave.

Da mesma forma que no exemplo anterior, fez-se a verificação do valor de λ a cada 10, 50 e 100 intervalos de tempo e obteve-se para $600\Delta t$ a seguinte relação entre os tempos de C.P.U.:

Sem Verificação	1,0
Verificação a cada	
100 Δt	1.068
50 Δt	1.075
10 Δt	1.09

3.5.3. EXEMPLO III

Tentando esclarecer melhor o comportamento do método da diferença central quando aplicado a problemas que envolvem plasticidade, analisou-se um caso simples de estado plano de tensões, utilizando-se um único elemento isoparamétrico quadrático, com esquema de integração numérica de Gauss de 2×2 .

A equação constitutiva é elastoplástica e o critério adotado é o de von Mises. A figura 3.11 apresenta o problema, bem como suas características.

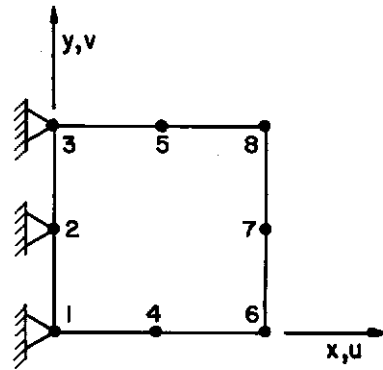
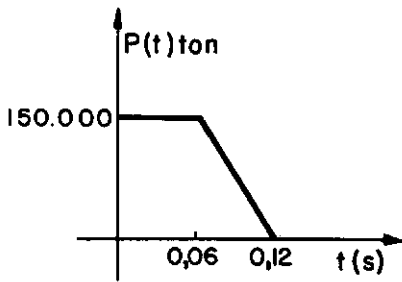
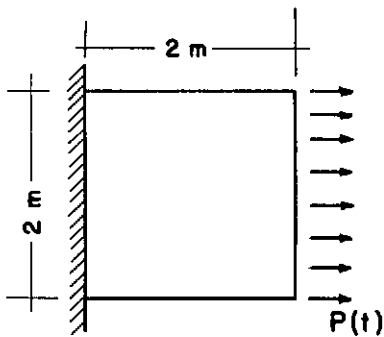
Para o período mínimo encontrou-se:

$T_{n_1} = 0.1045s$ para matriz de massa discreta e,

$T_{n_2} = 0.0695s$ para matriz de massa consistente.

$$e, \Delta t_{crit} = \frac{T_{n_1}}{\pi} = 0.0332s$$

$$\Delta t_{crit_2} = \frac{T_{n_2}}{\pi} = 0.0221s$$



$$\sigma_e = 50000 \text{ t/m}^2$$

$$\mu = 0.2$$

$$E = 10^6 \text{ t/m}^2$$

$$\rho = 2010 \text{ t/m}^3$$

Figura 3.11

O tempo gasto para que uma onda longitudinal atravessasse o elemento, é dado pela fórmula:

$$\Delta t_c = \gamma \ell \sqrt{\frac{\rho(1+\mu)(1-2\mu)}{E(1-\mu)}} \quad (5.3.1)$$

sendo ℓ a menor distância entre dois nós consecutivos. Para elementos quadráticos, como foi visto no item 3.3, o coeficiente γ foi sugerido variar de 0.2 a 0.6. No exemplo analisado, o valor de $\gamma=0.7$, dá uma boa aproximação do intervalo de tempo crítico para a matriz de massa discreta e $\gamma=0.5$ para a consistente. Assim, uti-

lizando-se a relação (5.3.1), encontrou-se

$$\Delta t = \gamma \times 0.0435$$

$$\text{Para } \gamma = 0.7 \Rightarrow \Delta t = 0.0298s$$

$$\text{Para } \gamma = 0.5 \Rightarrow \Delta t = 0.02125s$$

A Figura 3.12 apresenta a história no tempo do deslocamento horizontal do nó 7, para intervalos de tempo 0.003s, 0.01s e 0.025s, utilizando-se matriz de massa discreta. Os resultados obtidos com 0.003s e 0.01s foram praticamente coincidentes, já a solução com $\Delta t=0.025s$ apresentou resultados desastrosos.

O coeficiente λ , mostrado na Fig. 3.13, também neste problema detectou a instabilidade de forma satisfatória.

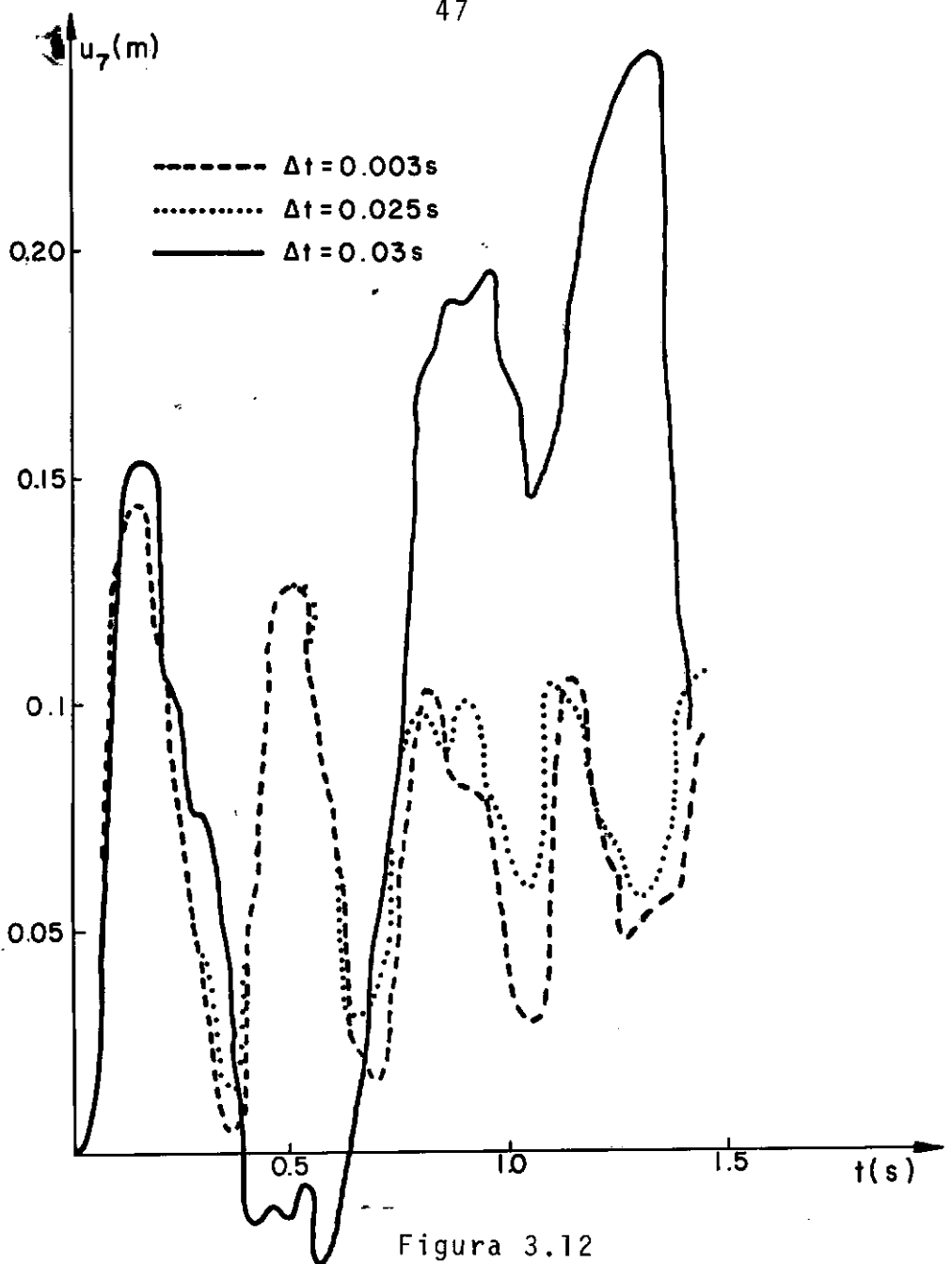


Figura 3.12

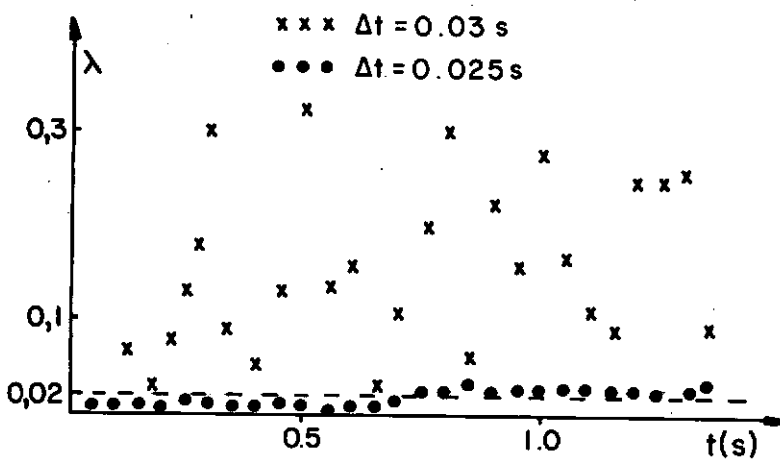


Figura 3.13

CAPÍTULO IV

ALGORITMO DE NEWMARK

4.1. INTRODUÇÃO

Comentou-se no capítulo II, que o Método de Newmark ($\gamma = \frac{1}{2}$ e $\beta \geq \frac{1}{4} (\gamma + \frac{1}{2})^2$), é incondicionalmente estável quando aplicado a sistemas estruturais dinâmicos lineares, e é um dos mais utilizados na prática. É natural, que se queira avaliar seu desempenho quando aplicado a sistemas de comportamento não linear.

O estudo da estabilidade neste caso, já não pode ser feito como no capítulo II, uma vez que a própria aproximação dada pelo processo iterativo - tipo Newton-Raphson, por exemplo - para solução das equações não lineares, influi decisivamente nesta estabilidade. Vários autores tratam este tema^{15, 18, 20, 24} chegando às vezes a resultados divergentes.

No presente trabalho faz-se uma abordagem do método segundo Hughes^{15, 20} e Belytschko e Schoeberle²⁴, por se entender que a definição da estabilidade como limitação da energia do sistema, parece ser a mais adequada. Tenta-se esclarecer alguns aspectos do comportamento do algoritmo em questão, quando se usa para a aproximação da não linearidade, a rigidez tangente ou o tratamento como pseudo-forças.

4.2. CARACTERÍSTICAS GERAIS

O problema de valor inicial a ser resolvido, é do tipo:

$$\underline{M} \ddot{\underline{u}} + \underline{C} \dot{\underline{u}} + \underline{F}(\underline{u}) = \underline{P}(t) \quad (4.1a)$$

com as seguintes condições iniciais:

$$\underline{u}(0) = \underline{u}_0 \quad (4.1b)$$

$$\dot{\underline{u}}(0) = \underline{v}_0$$

As matrizes, \underline{M} , \underline{C} , \underline{u} , $\dot{\underline{u}}$ e $\ddot{\underline{u}}$ são definidas como no capítulo II, estando a não linearidade contida em $\underline{F}(\underline{u})$. Assume-se que haja uma função escalar, $U(\underline{u})$, energia de deformação e que $F_i = \frac{\partial U}{\partial u_i}$ sendo u_i e F_i , componentes de \underline{u} e de $\underline{F}(\underline{u})$ respectivamente.

Fazendo-se o produto escalar de (4.1a) por $\dot{\underline{u}}$ e integrando-se de zero a t , pode-se mostrar que o problema de valor inicial (4.1), satisfaz a seguinte identidade de energia:

$$E(\underline{u}_t, \dot{\underline{u}}_t) = E(\underline{u}_0, \underline{v}_0) + \int_0^t [-\dot{\underline{u}}^T(\tau) \underline{C} \dot{\underline{u}}(\tau) + \dot{\underline{u}}^T(\tau) \underline{P}(\tau)] d\tau \quad (4.2)$$

onde

$$E_t = E(\underline{u}_t, \dot{\underline{u}}_t) = T(\dot{\underline{u}}_t) + U(\underline{u}_t), \text{ sendo } T_t = T(\dot{\underline{u}}_t) \text{ e } U_t = U(\underline{u}_t)$$

a energia cinética e energia de deformação no tempo t , respectivamente. Pode-se notar de (4.2) que a parcela que envolve a matriz de amortecimento, tende a dissipar energia, uma vez que \underline{C} é positiva, semi-definida e a parcela devida a \underline{P} gera energia.

Se $\underline{C} = \underline{0}$ e $\underline{P} = \underline{0}$ a energia total se conserva e tem-se que:

$$E_t = E_0 \quad (4.3)$$

Hughes¹⁵ faz o estudo do algoritmo de Crank-Nicholson

aplicado a um sistema de equações não lineares de primeira ordem, e prova que, independente do tipo de não linearidade, o algoritmo é estável e converge. Mostra também que a regra trapezoidal (Newmark com $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\beta = \frac{1}{4}$) é equivalente a este algoritmo estudado (Apêndice B). A estabilidade definida desta forma, não é apropriada a problemas de dinâmica estrutural, uma vez que deslocamentos e velocidades, crescem exponencialmente com o intervalo de tempo.

Surge então, a necessidade de uma definição mais rigorosa de estabilidade, e para tal, define-se "estabilidade na energia", uma vez que a energia pode ser tomada como uma norma equivalente à soma das normas dos deslocamentos e velocidades. Assumindo-se que a energia em um determinado instante, é limitada pela energia no instante anterior da seguinte forma:

$$E_{t+\Delta t} \leq (1+c\Delta t)E_t \quad (4.4)$$

pela desigualdade de Gronwall (Apêndice B); com:

$$b_1 = E_0$$

$$b_2 = nc\Delta t$$

tem-se:

$$E_{t+\Delta t} \leq e^{nc\Delta t} E_0 \quad (4.5)$$

Dessa forma, a energia cresce exponencialmente com o intervalo de tempo, como mostrado no Apêndice B.

Hughes¹⁵ sugere então que, b_2 não seja uma constante, e sim, uma função de Δt , de tal forma que:

a) $b_2 \rightarrow 0$, quando $\Delta t \rightarrow 0$

b) $c\Delta t \rightarrow c_1$, $c_1 \in [-1, 0]$, quando $\Delta t \rightarrow \infty$

Das condições (a) e (b) e da desigualdade (4.5) pode-se notar que, para pequenos intervalos de tempo, a energia é assintoticamente conservada e para grandes intervalos de tempo, esta energia não será amplificada. Se $c_1=0$, o algoritmo é assintoticamente conservativo.

4.3. VERIFICAÇÃO DO EQUILÍBRIO DINÂMICO - RIGIDEZ TANGENTE

Em geral, não é possível resolver (4.1) exatamente, devido a parcela não linear contida em $\underline{F}(\underline{u})$. O que se faz é resolver (4.1) aproximadamente, por um processo iterativo encontrando-se um sistema de equações da forma:

$$\underline{M} \ddot{\underline{u}}_{t+\Delta t} + \underline{C} \dot{\underline{u}}_{t+\Delta t} + \underline{F}(\underline{u}_{t+\Delta t}) = \underline{P}(t) - \underline{F}_{t+\Delta t}^e \quad (4.6)$$

onde $\underline{F}_{t+\Delta t}^e$ é o vetor das forças nodais desbalanceadas. Surge então, a necessidade de um processo iterativo, para diminuir o efeito de \underline{F}^e na solução geral. Na análise dinâmica não linear, este processo se torna imprescindível, uma vez que a estabilidade do algoritmo está relacionada com a medida deste erro.

Os procedimentos iterativos normalmente utilizados são:

- o Método de Newton-Raphson
- o Método de Newton-Raphson modificado.

No Método de Newton-Raphson, a matriz de rigidez é calculada a cada iteração, o que torna o processo muito dispendioso. No método de N.R. modificado, a matriz de rigidez permanece cons-

tante a cada incremento, e a convergência pode ser lenta, ou o processo iterativo pode até mesmo divergir. Para tornar este método mais eficiente nos casos de convergência lenta, vários esquemas aceleradores foram propostos. O acelerador de Aitken é um dos esquemas frequentemente utilizado²⁸.

Uma forma alternativa para o critério iterativo de N.R. são os métodos quasi-Newton. Um destes métodos é o BFGS (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno).

No presente trabalho, a iteração para o equilíbrio dinâmico é feita com a matriz de rigidez constante durante cada incremento, como exposto por Ebecken⁴⁵.

4.4. DISCRETIZAÇÃO DA ENERGIA

Para simplificação das equações da energia discreta, utilizou-se o algoritmo de Newmark com $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\beta = \frac{1}{4}$ (regra trapezoidal), ficando as aproximações para deslocamentos e velocidades, da seguinte forma:

$$\underline{u}_{t+\Delta t} - \underline{u}_t = \frac{\Delta t}{2} (\dot{\underline{u}}_{t+\Delta t} + \dot{\underline{u}}_t) \quad (4.7a)$$

$$\dot{\underline{u}}_{t+\Delta t} - \dot{\underline{u}}_t = \frac{\Delta t}{2} (\ddot{\underline{u}}_{t+\Delta t} - \ddot{\underline{u}}_t) \quad (4.7b)$$

A identidade de energia descrita em (4.2) pode ser escrita, como:

$$E_t = E(\underline{u}_t, \dot{\underline{u}}_t) = T_t + U_t \quad (4.8)$$

logo,

$$E_{t+\Delta t} - E_t = T_{t+\Delta t} - T_t + U_{t+\Delta t} - U_t \quad (4.9)$$

sendo

$$T_t = \frac{1}{2} \dot{\underline{u}}_t^T \underline{M} \dot{\underline{u}}_t \quad (4.10)$$

Expandindo-se a energia de deformação em série de Taylor finita e substituindo-se (A.3) (Apêndice A) e (4.10) em (4.9), tem-se:

$$\begin{aligned} \Delta E_t = E_{t+\Delta t} - E_t = & \frac{1}{2} (\dot{\underline{u}}_{t+\Delta t}^T - \dot{\underline{u}}_t^T) \underline{M} (\dot{\underline{u}}_{t+\Delta t} + \dot{\underline{u}}_t) + \frac{1}{2} (\underline{u}_{t+\Delta t}^T - \\ & - \underline{u}_t^T) [\underline{F}(\underline{u}_{t+\Delta t}) + \underline{F}(\underline{u}_t)] + (\underline{u}_{t+\Delta t}^T - \underline{u}_t^T) \underline{S}_t (\underline{u}_{t+\Delta t} - \underline{u}_t) \end{aligned} \quad (4.11)$$

De posse das relações (4.6), (4.7a) e de (4.11) pode-se afirmar que:

$$\begin{aligned} \Delta E_t = & \frac{\Delta t}{4} (\dot{\underline{u}}_{t+\Delta t}^T + \dot{\underline{u}}_t^T) [(\underline{p}_{t+\Delta t} + \underline{p}_t) + (\underline{F}_{t+\Delta t}^e + \underline{F}_t^e) - \underline{C}(\dot{\underline{u}}_{t+\Delta t} + \dot{\underline{u}}_t)] + \\ & + \frac{\Delta t^2}{4} (\dot{\underline{u}}_{t+\Delta t}^T + \dot{\underline{u}}_t^T) \underline{S}_t (\dot{\underline{u}}_{t+\Delta t} + \dot{\underline{u}}_t) \end{aligned} \quad (4.12)$$

Colocando-se (4.12) em função da energia inicial E_0 :

$$\begin{aligned} E_{t+\Delta t} = E_0 + \frac{\Delta t}{4} \sum_{t=0}^t \{ & (\dot{\underline{u}}_{t+\Delta t}^T + \dot{\underline{u}}_t^T) [\underline{p}_{t+\Delta t} + \underline{p}_t) - \underline{C}(\dot{\underline{u}}_{t+\Delta t} + \dot{\underline{u}}_t) + \\ & + (\underline{F}_{t+\Delta t}^e + \underline{F}_t^e) + \Delta t \underline{S}_t (\dot{\underline{u}}_{t+\Delta t} + \dot{\underline{u}}_t) \} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Os dois últimos termos de (4.13) representam os erros devidos aos efeitos não lineares. Fazendo-se iterações, o termo que envolve \underline{F}^e , pode ser controlado, mas a parcela que envolve \underline{S}_t fica definida, uma vez determinado o intervalo de tempo. A menos

dos dois termos citados no parágrafo anterior, pode-se notar que (4.13) é uma forma discretizada da identidade (4.2). Como,

$$\Delta t \frac{\dot{u}_{t+\Delta t} - \dot{u}_t}{2} = u_{t+\Delta t} - u_t ,$$

então:

$$\frac{\Delta t}{4} \sum_{t=0}^t \{ (\dot{u}_{t+\Delta t}^T + \dot{u}_t^T) [P_{t+\Delta t} + P_t] - C(\dot{u}_{t+\Delta t} + \dot{u}_t) \} ,$$

pode ser visto como a integração trapezoidal das integrações contidas em (4.2).

4.5. ESTUDO DA ESTABILIDADE

Na desigualdade (4.4) pode-se supor que para um determinado Δt fixo, $1+c\Delta t=C$, sendo C uma constante pouco maior que 1, ou seja:

$$C = 1.0 << 1$$

Assim, pode-se escrever (4.4) da seguinte forma:

$$T_{t+\Delta t} + U_{t+\Delta t} \leq C(T_t + U_t) \quad (4.14)$$

Substituindo-se (2.33) com $\gamma = \frac{1}{2}$ em

$$T_{t+\Delta t} = \frac{1}{2} \dot{u}_{t+\Delta t}^T M \dot{u}_{t+\Delta t}$$

tem-se:

$$\tau_{t+\Delta t} = \tau_t + \frac{\Delta t}{2} \dot{u}_t^T M(\ddot{u}_{t+\Delta t} + \ddot{u}_t) + \frac{\Delta t^2}{8} (\ddot{u}_{t+\Delta t}^T + \ddot{u}_t^T) M(\ddot{u}_{t+\Delta t} + \ddot{u}_t) \quad (4.15)$$

Desenvolve-se o primeiro termo de (4.14), sendo $u_{t+\Delta t}$ discretizado como no apêndice A para obter:

$$\begin{aligned} \tau_{t+\Delta t} + u_{t+\Delta t} = u_t + \frac{1}{2} \Delta u_t^T (F_{t+\Delta t} + F_t) + \tau_t + \frac{\Delta t}{2} \dot{u}_t^T M(\ddot{u}_{t+\Delta t} + \ddot{u}_t) + \\ + \frac{\Delta t^2}{8} (\ddot{u}_{t+\Delta t}^T + \ddot{u}_t^T) M(\ddot{u}_{t+\Delta t} + \ddot{u}_t) \end{aligned} \quad (4.16)$$

Somando-se e subtraindo-se $\Delta u_t^T M(\ddot{u}_{t+\Delta t} + \ddot{u}_t)$ e rearranjando-se os termos, tem-se:

$$\begin{aligned} \Delta \tau_{t+\Delta t} + \Delta u_{t+\Delta t} = \frac{1}{2} \Delta u_t^T (F_{t+\Delta t} + M \ddot{u}_{t+\Delta t}) + \frac{1}{2} \Delta u_t^T (F_t + M \ddot{u}_t) + \\ + \frac{1}{2} (\Delta t \dot{u}_t^T - \Delta u_t^T) M(\ddot{u}_{t+\Delta t} - \ddot{u}_t) + \frac{\Delta t^2}{8} (\ddot{u}_{t+\Delta t}^T + \ddot{u}_t^T) M(\ddot{u}_{t+\Delta t} + \ddot{u}_t) \end{aligned} \quad (4.17)$$

Substituindo-se as equações (4.6) e (2.32) obtém-se:

$$\begin{aligned} \Delta \tau_{t+\Delta t} + \Delta u_{t+\Delta t} = - \frac{1}{2} \Delta u_t^T (F_{t+\Delta t}^e + F_t^e) + \frac{\Delta t^2}{8} (\beta - \frac{1}{4}) (\ddot{u}_t^T - \\ - \ddot{u}_{t+\Delta t}^T) M(\ddot{u}_t + \ddot{u}_{t+\Delta t}) \end{aligned} \quad (4.18)$$

Se $\beta = \frac{1}{4}$, o último termo de (4.18) se anula e pode ser escrito como:

$$\Delta \tau_{t+\Delta t} + \Delta u_{t+\Delta t} = - \frac{1}{2} \Delta u_t^T (F_{t+\Delta t}^e + F_t^e)$$

Fazendo-se:

$$\left| \frac{1}{2} \Delta u_t^T (\underline{F}_{t+\Delta t}^e + \underline{F}_t^e) \right| \leq \epsilon (U_t + T_t) \quad (4.19)$$

$$|\Delta T_{t+\Delta t} + \Delta U_{t+\Delta t}| = \left| -\frac{1}{2} \Delta u_t^T (\underline{F}_{t+\Delta t}^e + \underline{F}_t^e) \right| \quad (4.20)$$

Uma vez que $E_t = T_t + U_t > 0$, tem-se:

$$T_{t+\Delta t} + U_{t+\Delta t} \leq (1+\epsilon)(U_t + T_t) \quad (4.21)$$

Comparando-se (4.21) com (4.4), pode-se notar que se $\epsilon = c\Delta t$ e obedecendo a condição (a) o algoritmo é estável.

Pode-se também observar que se o problema for linear, $\underline{F}_{t+\Delta t}^e = \underline{F}_t^e = 0$ e o algoritmo de Newmark com $\gamma = \frac{1}{2}$ e $\beta = \frac{1}{4}$ conserva a energia total.

Hughes²⁴ prova também que para grandes intervalos de tempo, o método é assintoticamente conservativo e que para intervalos de tempo intermediários, a energia total é uniformemente limitada, como pode ser visto na Figura 4.1.

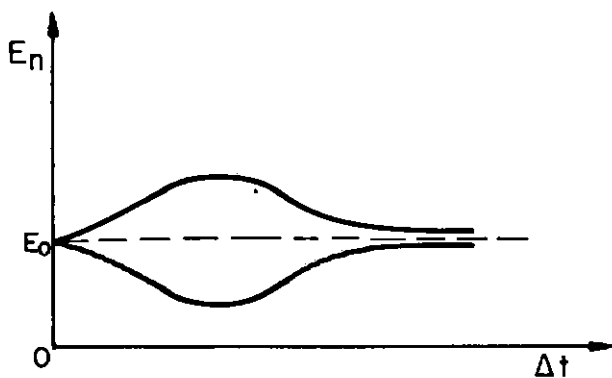


Figura 4.1

Quando se faz a discretização da energia total:

$$E_t = T_t + U_t$$

sendo U_t aproximado pela regra do trapézio, não se pode afirmar a priori que:

$$U_t = E_t - T_t$$

será positivo. Neste caso, não se pode garantir que deslocamentos e velocidades sejam uniformemente limitados. Contudo, para materiais elastoplásticos e para os materiais mais utilizados na prática, $U_t > 0$ o que acarreta a limitação das velocidades e deslocamentos.

Hughes¹⁸ também prova que, o estudo da estabilidade feito anteriormente, pode ser estendido para grandes deformações de materiais não lineares, definindo-se o gradiente de deformações $\underline{H} = \underline{\hat{B}} \underline{u}$ e assumindo que o primeiro tensor de Piolla-Kirchoff \underline{P} é função não linear de \underline{H} , de tal forma que:

$$\underline{E} = \int_V \underline{\hat{B}}^T \underline{P} dV$$

4.6. CRITÉRIOS DE CONVERGÊNCIA

É usual, na maior parte dos sistemas computacionais, utilizar na verificação iterativa do equilíbrio dinâmico critérios de convergência baseados em normas euclidianas de deslocamentos. Entretanto estes critérios devem ser usados cuidadosamente já que a obediência aos mesmos nem sempre implica na convergência da solução.

No item anterior, comentou-se um critério sugerido por Belytschko e Schoerbele²⁴ que consiste em satisfazer:

$$\left| \frac{\Delta \underline{u}^{(i)T}}{2} (\underline{F}_{t+\Delta t}^e + \underline{F}_t^e) \right| \leq \epsilon (U_t + T_t) \quad (4.19)$$

sendo:

- $\underline{F}_{t+\Delta t}^e$ a força nodal desbalanceada na iteração "i", do tempo $t+\Delta t$
- \underline{F}_t^e a força nodal desbalanceada no final do intervalo de tempo anterior e,
- U_t aproximada pela regra do trapézio

Um outro critério sugerido por Bathe e Cimento^{28,41} consiste em satisfazer simultaneamente a duas verificações:

$$\frac{\| \underline{P}_{t+\Delta t} - \underline{F}_{t+\Delta t}^{(i-1)} - \underline{M} \ddot{\underline{u}}_{t+\Delta t}^{(i-1)} \|_2}{\| \underline{P}_t - \underline{F}_{t-\Delta t} - \underline{M} \ddot{\underline{u}}_{t-\Delta t} \|_2^{\max}} \leq \text{ETOL} \quad (4.22a)$$

e

$$\frac{|\Delta \underline{u}^{(i)T} (\underline{P}_{t+\Delta t} - \underline{F}_{t+\Delta t}^{(i-1)} - \underline{M} \ddot{\underline{u}}_{t+\Delta t}^{(i-1)})|}{|\Delta \underline{u}^{(i)T} (\underline{P}_{t+\Delta t} - \underline{F}_t - \underline{M} \ddot{\underline{u}}_t)|} \leq \text{ETOL} \quad (4.22b)$$

A primeira delas, é uma relação baseada nas forças nodais desbalanceadas, onde toma-se a norma euclideana destas forças, calculada a cada iteração, e no denominador, por problemas de convergência, adota-se a maior norma já ocorrida em todo processo.

O segundo critério, assemelha-se a um incremento de energia, também calculado a cada iteração.

Quando a não-linearidade provoca enrijecimento, a primeira verificação deve ser mais rigorosa, já que nestes casos, as forças crescem muito mais do que os deslocamentos. Caso contrário, esta norma não fornece informações a respeito dos deslocamentos e um maior rigor na verificação de (4.22b) se faz necessário.

Finalmente como (4.22a) e (4.22b) tendem a zero à medida que a resposta da estrutura se aproxima da solução, Bathe e Cimento sugerem que ambos os critérios sejam verificados.

4.7. ANÁLISE DE RESULTADOS

Os critérios mencionados foram implantados no sistema LORANE/NL, com a finalidade de testar alguns casos típicos de situações práticas.

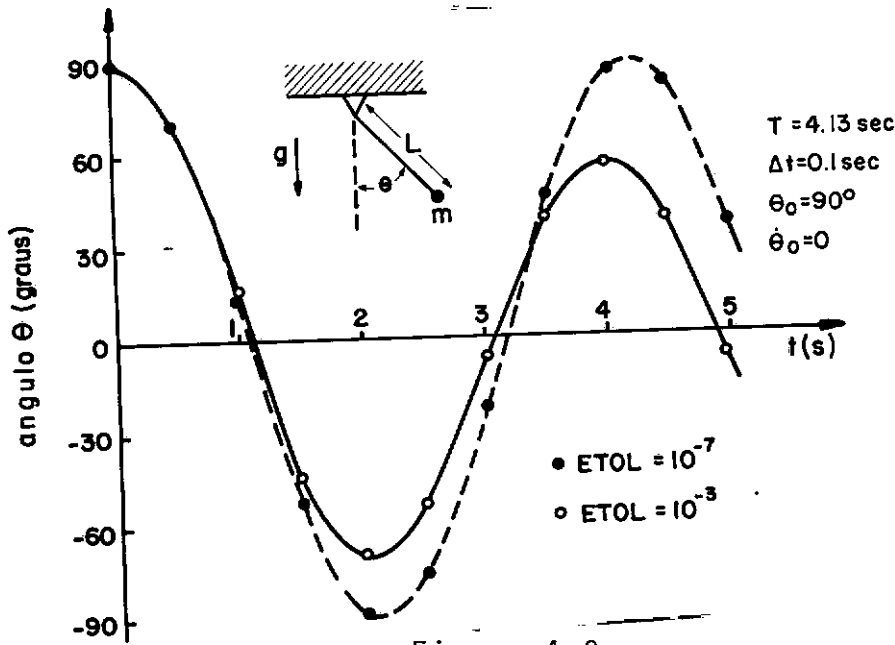
Analisaram-se quatro exemplos, e convencionou-se chamar de critério I ao fornecido em (4.19), critério II ao descrito pela relação (4.22) e de critério III à norma de deslocamento:

$$\frac{\| \underline{u}_{t+\Delta t}^{i+1} - \underline{u}_{t+\Delta t}^i \|}{\| \underline{u}_{t+\Delta t}^{i+1} \|} \leq DTOL$$

4.7.1. EXEMPLO I

O primeiro exemplo analisado é o do pêndulo simples sugerido por Bathe e Cimento^{28,41}. O pêndulo foi idealizado como um elemento de treliça com uma massa concentrada em sua extremi-

dade, como mostra a Figura 4.2.



O exemplo foi processado com intervalos de tempo 0.1s, 0.01s e 0.001s. Para o critério II adotou-se $ETOL=10^{-3}$, $ETOL=10^{-7}$ e $FTOL=10^{-4}$. Os resultados obtidos e que coincidem com a solução dada por Bathe e Cimento⁴¹, estão na Figura 4.2.

Nota-se a importância da verificação de ETOL neste exemplo.

Para intervalos de tempo 0.01s e 0.001s o denominador da expressão (4.22a) forneceu valores muito próximos de zero, não permitindo a aplicação do critério II com a utilização da precisão simples. Para o critério I, não se conseguiu convergência para $\Delta t=0.01s$ e $\Delta t=0.1s$. Para $\Delta t=0.001s$ e $\varepsilon=0.0001$ obteve-se a mesma solução dada para $\Delta t=0.1s$, $ETOL=10^{-7}$ e $FTOL=10^{-4}$.

É importante ressaltar que no caso analisado, a solução que se vale do critério de norma de deslocamento, efetuada com a tolerância de 0.001 (usualmente adotada como default) forneceu resultados inaceitáveis. Este problema não foi contornado nem com uma tolerância de 10^{-7} como mostra a Tabela I.

Tempo	Critério III		Critério II ETOL= 10^{-7} FTOL= 10^{-3}
	DTOL= 10^{-2}	DTOL= 10^{-7}	
0.5	71.4	71.4	71.3
1.0	17.1	15.2	13.2
1.5	-41.7	-49.6	-53.18
2.0	-84.0	-86.9	-88.02
2.5	-59.7	-80.1	-77.7
3.0	-13.2	-31.6	-25.3
3.5	37.8	34.9	43.0
4.0	62.5	81.6	85.1
4.5	48.3	86.1	82.8
5.0	38.9	46.7	36.8

Tabela I

	Critério III		Critério II ETOL= 10^{-7} FTOL= 10^{-3}
	DTOL= 10^{-2}	DTOL= 10^{-7}	
Nº total de Iterações	49	281	986

Tabela II

4.7.2. EXEMPLO II

Analisa-se a seguir, o comportamento da viga bi-engasta da cujas características estão apresentadas na Figura 4.3.

Este é um exemplo típico de enrijecimento da estrutura, que ocasiona usualmente problemas de convergência nos algoritmos

iterativos.

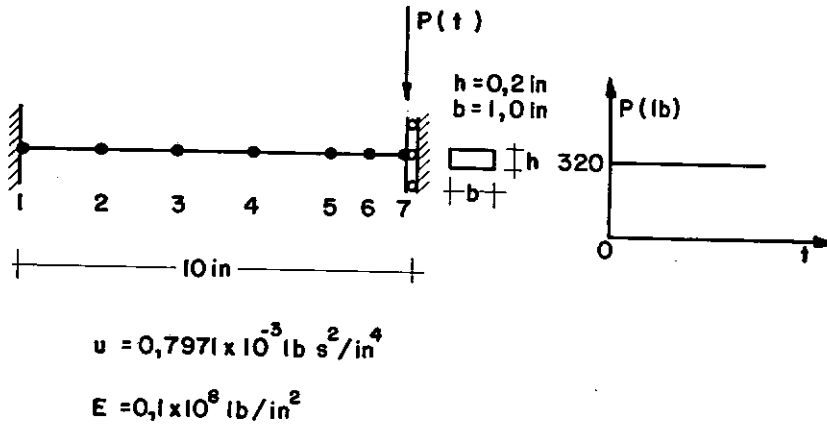


Figura 4.3

A viga foi discretizada em 7 elementos como mostra a Figura 4.3 e os períodos fundamental e mínimo calculados para este modelo de elementos finitos são mostrados a seguir:

	T_f (s)	T_m (s)
com inércia de rotação	0.17375×10^{-1}	0.43511×10^{-4}
sem inércia de rotação	0.17366×10^{-1}	0.32265×10^{-4}

e, $\Delta t_{\text{crit}} = 1.385 \times 10^{-5} \text{ s}$ (com inércia de rotação)

$\Delta t_{\text{crit}} = 1.027 \times 10^{-5} \text{ s}$ (sem inércia de rotação)

Foram utilizados os seguintes intervalos de tempo:

- 0.00001s
- 0.00005s
- 0.0001s
- 0.0005s
- 0.001s

Para o intervalo de tempo 0.00001s, houve convergência na norma dos deslocamentos e, com a utilização do critério I com $\epsilon=0.00001$. O critério II, não foi satisfeito para valores razoáveis da tolerância. Para os intervalos de tempo 0.00005s e 0.0001s, há convergência segundo os três critérios quando se considera as seguintes tolerâncias:

- Critério I $\Rightarrow \epsilon=0.00005$ e 0.005
- Critério II $\Rightarrow ETOL=0.001$; $FTOL=0.0001$
- Critério III $\Rightarrow DTOL=0.01$ e 0.0001

Para $\Delta t=0.0005s$ houve convergência segundo o critério I com $\epsilon=0.001$.

A convergência, segundo o critério II não ocorre para $ETOL=0.001$ e $FTOL=0.0001$ e o uso do critério III com $DTOL=0.001$ fornece uma aproximação melhor que com $DTOL=0.01$. Finalmente para $\Delta t=0.001s$, os critérios I e II não foram satisfeitos com valores normalmente utilizados de tolerância. Já o critério III não detetou instabilidade quando se usa $DTOL=0.001$ porém, a partir de $t=0.008s$ os deslocamentos crescem indefinidamente.

A Figura 4.4 apresenta o resultado para deslocamentos para intervalos de 0.00001s, 0.0005s e 0.001s. Pode-se notar que para $\Delta t=0.0005s$ apesar de não se ter uma boa aproximação o resultado é estável. Para $\Delta t=0.001s$ tem-se uma fraca aproximação até o tempo 0.007s e a partir daí, a solução se instabiliza. O tempo de CPU dispendido quando se emprega os critérios I e II medidos

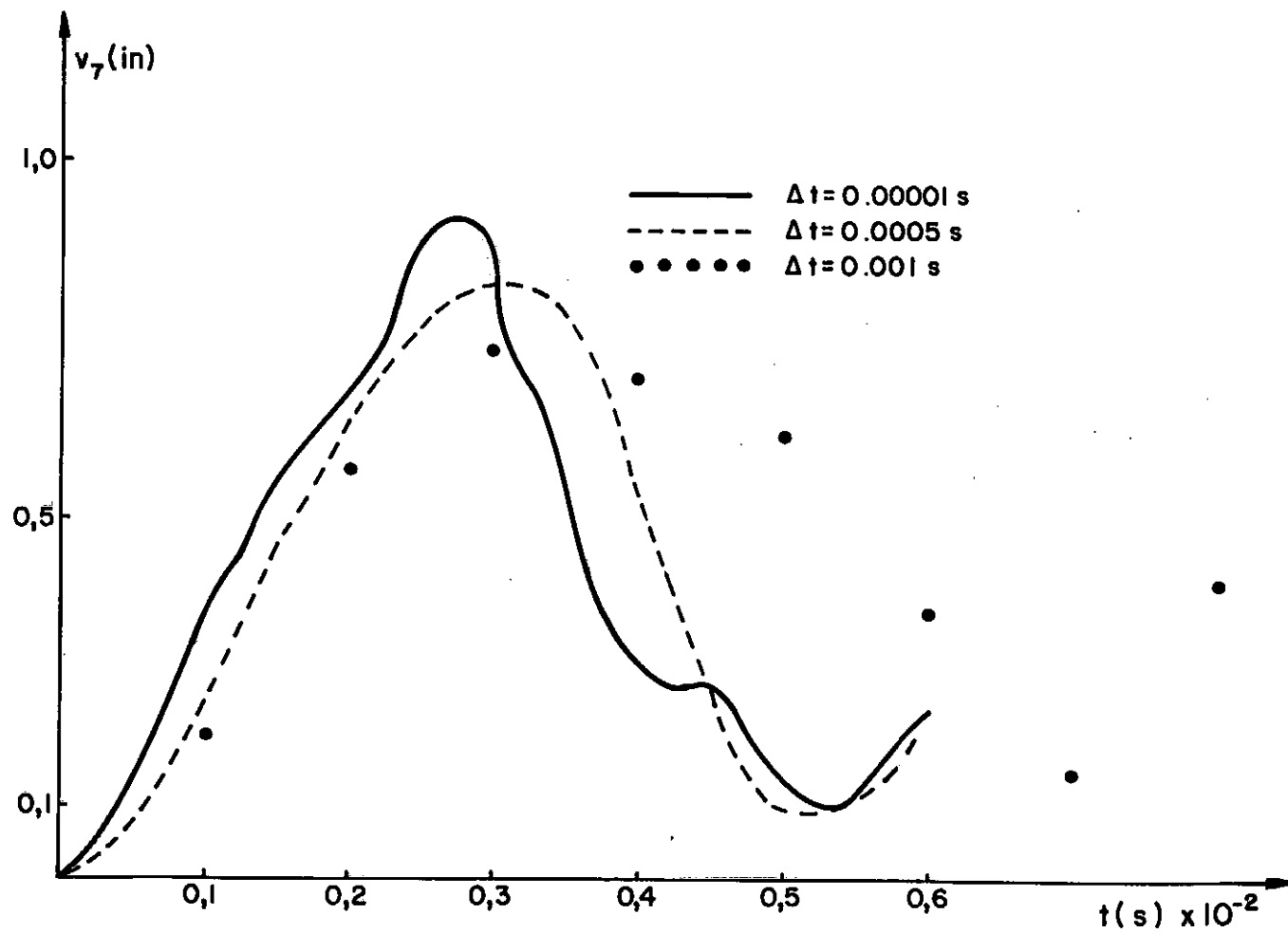


Figura 4.4

relativamente ao tempo do critério III são apresentados na Tabela III.

CRITÉRIOS	
I	1,5
II	1,9
III	1,0

Tabela III

4.7.3. EXEMPLO III

O estudo dos critérios discutidos anteriormente aplicados à análise do comportamento dinâmico não-linear de estruturas em que ocorre instabilidade, é realizado com o arco da Figura 4.5 que foi analisado por Humphreys^{4,7} e Landau^{3,3}.

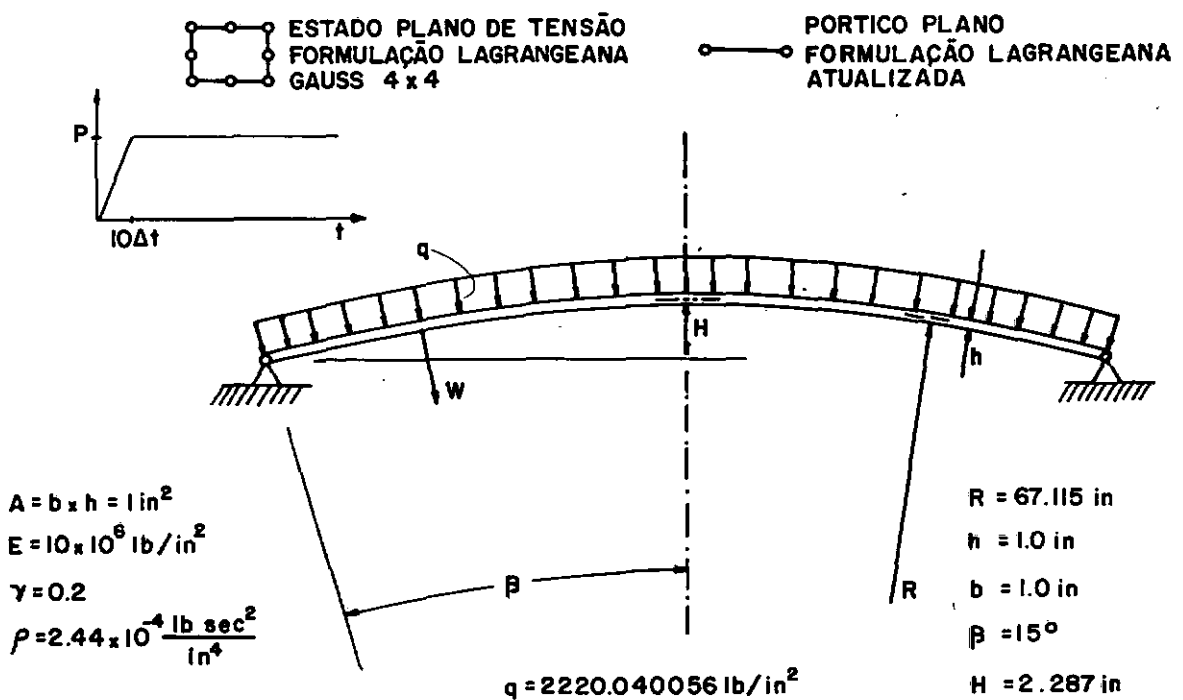


Figura 4.5

Neste exemplo vale-se da simetria do problema utilizando-se na discretização 12 elementos de pórtico plano com formulação Lagrangeana atualizada (35 graus de liberdade). Para avaliar a aproximação do modelo e dos métodos de integração, escolheu-se o valor de $P=0.25$, que corresponde a uma carga superior a carga crítica e, apresenta-se na Figura 4.6 a história da deflexão central. Nesta mesma figura são apresentados também os resultados obtidos com a utilização na discretização de 6 elementos isoparamétricos quadráticos com formulação Lagrangeana. Finalmente mostra também a mesma figura, a resposta pelo método da superposição modal.

O interesse da presente análise é motivado pelas discrepâncias ocorridas nas soluções para as situações pós-críticas. Este exemplo foi processado com intervalos de:

- 0.000001s
- 0.00003315s
- 0.00001s

Para o critério I, utilizou-se tolerâncias que variaram de 0.000002 a 0.0001.

As soluções são praticamente coincidentes fornecendo resultados precisos mesmo para a deformada que corresponde a deflexão central máxima que atinge cerca de $2.8H$. Entretanto ao retornar à posição correspondente a $W=H$ (cerca de $140\Delta t$) a solução é interrompida por não mais atender ao critério.

O critério II não foi satisfeito. Mesmo utilizando-se valores relativamente grandes para ETOL e FTOL, não se conseguiu integrar mais do que $40\Delta t$. Para DTOL=0.01 e 0.001 e para os intervalos de tempo de 0.000001s e 0.00003315s, o critério III apre -

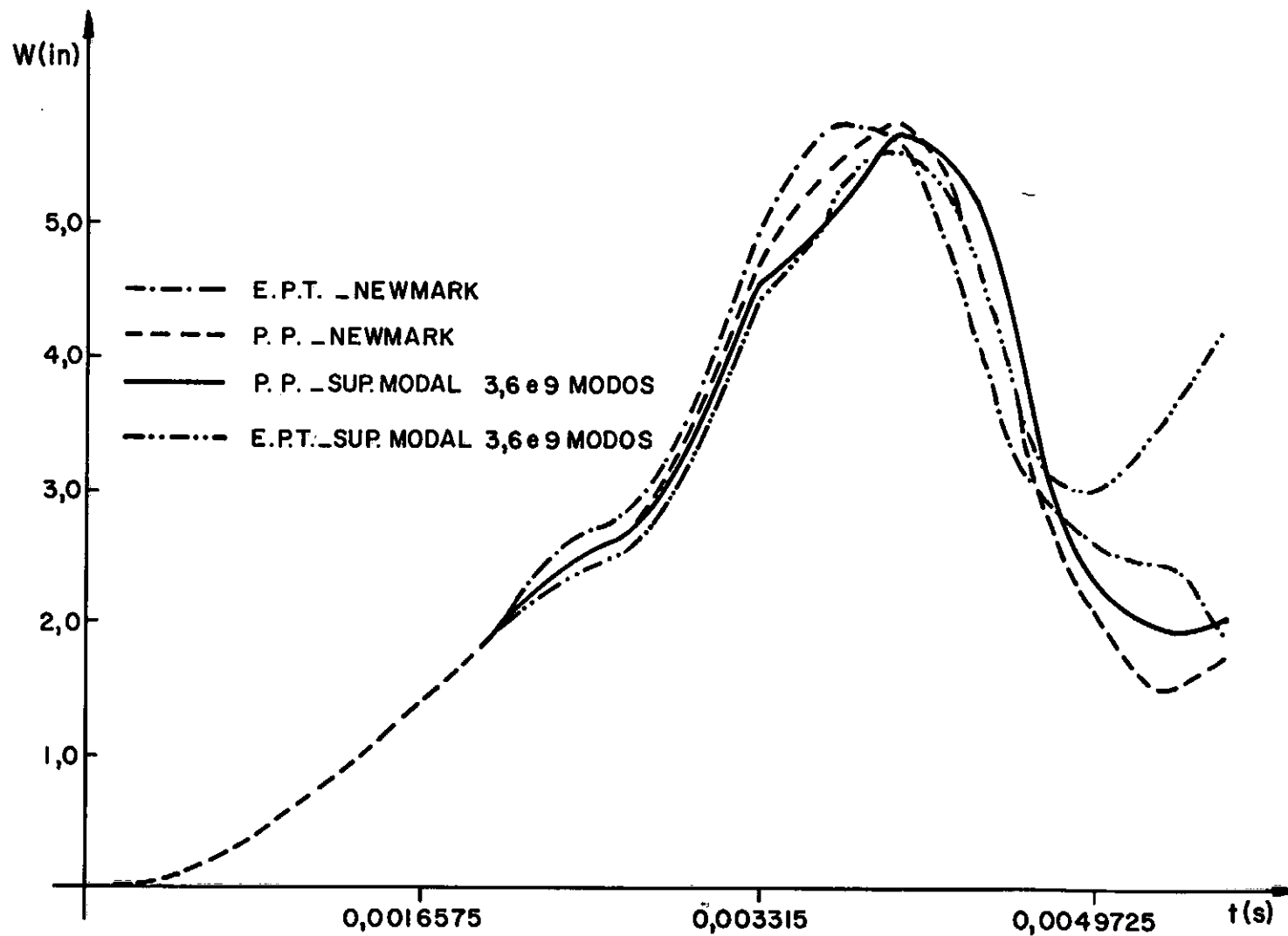


Figura 4.6

sentou resultados coincidentes (Figura 4.6), no entanto para $\Delta t = 0.00001s$ e $DTOL = 0.01$, o processo divergiu, sendo interrompido (overflow) em $0.0021s$, ou seja, quando a deflexão tende a atingir o valor de H .

4.7.4. EXEMPLO IV

Analizou-se a seguir a estaca do Exemplo 3.1. Fez-se uma comparação para $\Delta t = 0.000125s$, $0.0004s$. Nas Figuras 4.7 e 4.8 apresentam-se os resultados para deslocamentos na extremidade inferior da estaca e a força na barra 3. A aproximação dada para $\Delta t = 0.000125s$ é praticamente coincidente com a solução por Diferença Central com o mesmo intervalo de tempo. Para $\Delta t = 0.0004s$ a solução para deslocamentos já apresenta pequena defasagem em relação ao intervalo anterior. Para forças, como indicado na Figura 4.8, a aproximação no que diz respeito a defasagem e amplitude é razoavelmente bem comportada até cerca de $0.03s$. A partir deste valor as soluções apresentam comportamento bastante discordante. O critério I foi utilizado com $\epsilon = 0.0001$ e o resultado foi bastante semelhante ao obtido com o do critério III, sendo $DTOL = 0.0001$. Comparando-se o tempo de processamento dispendido para se obter o resultado com diferença central, (λ calculado a cada 10 intervalos) e Newmark (adotando o critério III e o mesmo intervalo de tempo) a solução que se vale deste último é 50% mais dispendiosa que a do primeiro. Com o critério II, não se obteve resultados, por questões de convergência.

4.8. COMENTÁRIOS GERAIS

Pelos exemplos analisados concluiu-se que:

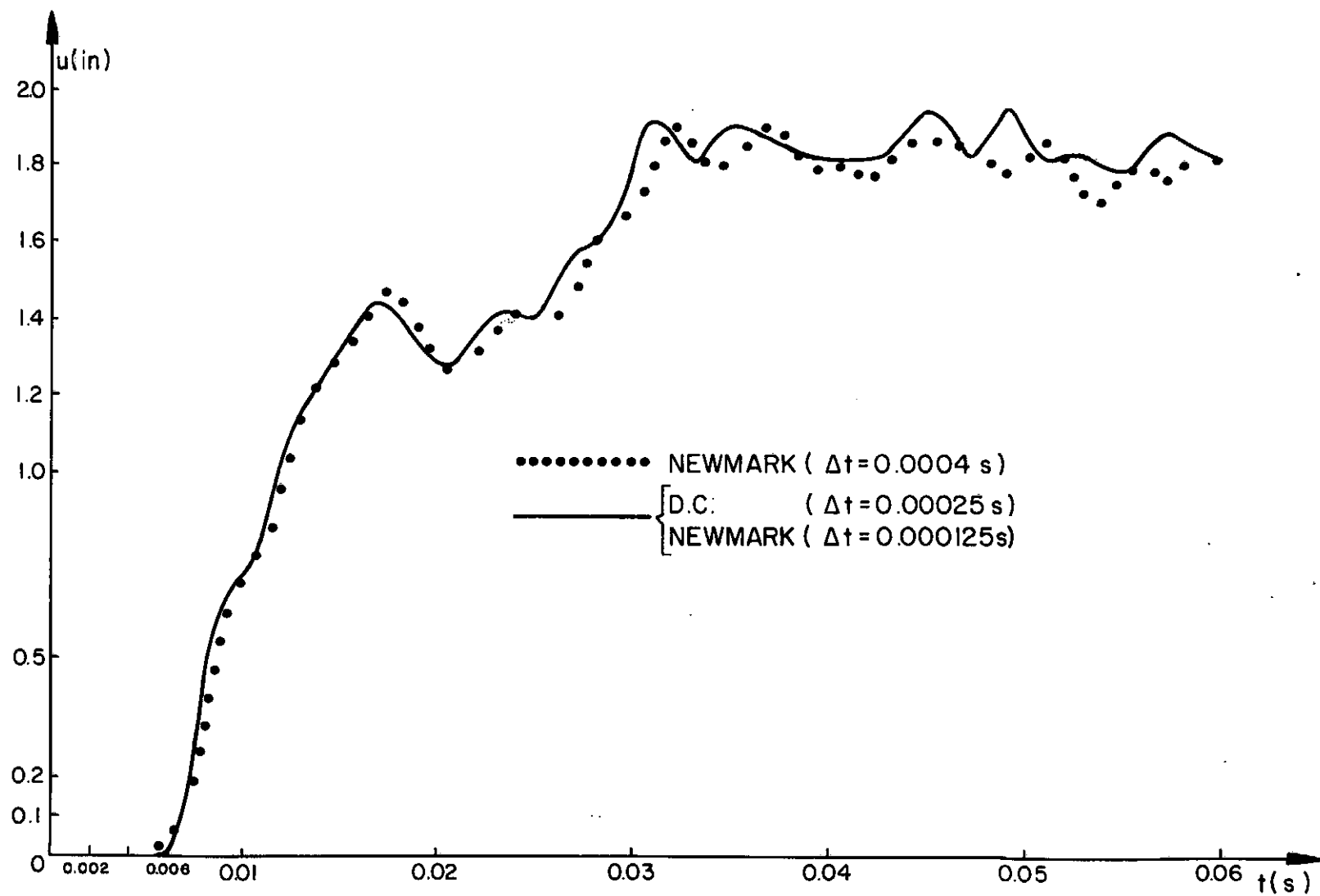


Figura 4.7

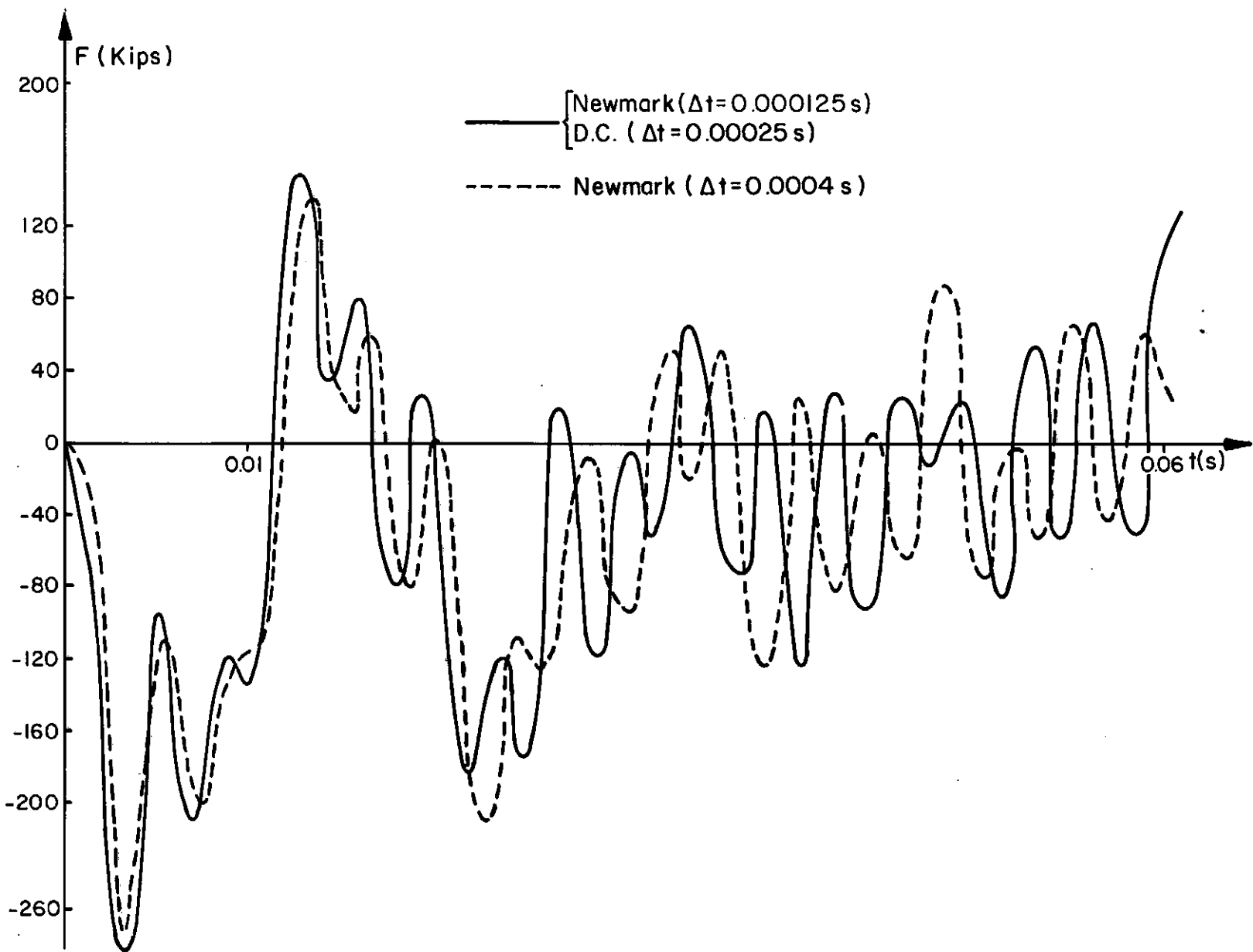


Figura 4.8

- O critério fornecido em (4.19) se aplica satisfatoriamente a problemas em que o intervalo de tempo a ser utilizado é pequeno. Caso contrário, a aproximação para U_t , fica de tal forma comprometida que a verificação sugerida, não mais se aplica.

- Os critérios indicados em (4.22) se comportaram muito bem em problemas em que o intervalo de tempo é relativamente grande. Com intervalos muito pequenos, surgiram problemas de convergência e que em muitos casos, provavelmente se devem a utilização de precisão simples.

- Para o critério I, foi comentado anteriormente no item 4.2 que:

$$c \rightarrow 0 \text{ quando } \Delta t \rightarrow 0, \text{ sendo } \epsilon = \Delta t c.$$

Pelos exemplos analisados, pode-se considerar razoável o valor de ϵ ser da ordem de 10^{-7} aproximadamente.

- Para o critério II, os valores de ETOL e FTOL, possuem maior faixa de variação, dependendo do tipo de não linearidade. Nos exemplos analisados, conseguiu-se bons resultados com ETOL e FTOL variando na seguinte intervalo:

$$10^{-4} \leq \text{ETOL} \leq 10^{-7} \quad \text{e} \quad 10^{-2} \leq \text{FTOL} \leq 10^{-5}$$

4.9. VERIFICAÇÃO DO EQUILÍBRIO DINÂMICO - PSEUDO-FORÇAS

No procedimento de rigidez tangente a matriz de rigidez efetiva, necessita ser atualizada a cada intervalo de tempo, para ser então decomposta e passar por um processo de retro-substituição até que a convergência seja alcançada para uma tolerância pré fixada.

Num outro enfoque sugerido por Stricklin²⁷, todos os termos não-lineares, são colocados no segundo membro da equação de equilíbrio dinâmico como pseudo-forças, evitando assim, a atualização e posterior redecomposição da matriz de rigidez efetiva a cada intervalo de tempo. Neste trabalho Stricklin sugere que este vetor contendo a parcela não linear, seja aproximado por uma expansão de primeira ordem em série de Taylor, em torno do intervalo de tempo anterior.

Um procedimento semelhante foi sugerido por Hofmeister³⁵, que preferiu entretanto, adotar na estimativa do vetor de pseudo-forças, uma outra aproximação, inclusive de natureza iterativa, e que é a adotada no presente estudo.

O tipo de problema exposto por Hofmeister³⁵, que desperta interesse, é o de uma estrutura de comportamento linear na qual são acopladas molas não lineares, como um sistema estaca-solo por exemplo. Nestes casos, o sistema de equações a ser resolvido:

$$\underline{M} \ddot{\underline{u}}_{t+\Delta t} + \underline{C} \dot{\underline{u}}_{t+\Delta t} + [\underline{K} \underline{u}_{t+\Delta t} + \underline{K}_m(\underline{u}_{t+\Delta t})] \underline{u}_{t+\Delta t} = \underline{P}_{t+\Delta t} \quad (4.24)$$

pode ser colocado na forma:

$$[\underline{K}_0 + \underline{K}_m(\underline{u}_{t+\Delta t})] \underline{u}_{t+\Delta t} = \underline{P}_{t+\Delta t}^* \quad (4.25)$$

onde \underline{K}_0 é a matriz de rigidez efetiva e \underline{K}_m , contem os coeficientes de rigidez das molas. Esta matriz será diagonal, se as molas não conectam graus de liberdade entre si.

Utilizando-se o algoritmo de Newmark para a integração direta de (4.25), tem-se:

$$\underline{K}_0 = \frac{1}{\gamma \Delta t^2} \underline{M} + \frac{\beta}{\gamma \Delta t} \underline{C} + \underline{K} \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} \underline{P}_{t+\Delta t}^* = \underline{P}_{t+\Delta t} + \underline{M} \left[\frac{1}{\gamma \Delta t^2} \underline{u}_t + \frac{1}{\gamma \Delta t} \dot{\underline{u}}_t + \left(\frac{1}{2\gamma} - 1 \right) \ddot{\underline{u}}_t \right] + \\ + \underline{C} \left[\frac{\beta}{\gamma \Delta t} \underline{u}_t + \left(\frac{\beta}{\gamma} \Delta t - 1 \right) \dot{\underline{u}}_t + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\beta}{\gamma} - 2 \right) \ddot{\underline{u}}_t \right] \end{aligned}$$

e, (4.25) toma a forma:

$$\underline{K}_0 \underline{u}_{t+\Delta t}^{(i+1)} = \underline{P}_{t+\Delta t}^* - [\underline{K}_m(\underline{u}_{t+\Delta t}^{(i)})] \underline{u}_{t+\Delta t}^{(i)} \quad i=1,2,\dots,j \quad (4.27)$$

sendo \underline{K}_m aproximado como se segue:

$$[\underline{K}_m(\underline{u}_{t+\Delta t}^1)] \underline{u}_{t+\Delta t}^1 = \underline{N}_{t+\Delta t}^1 = 2\underline{N}_t^j - \underline{N}_{t-\Delta t}^j \quad (4.28)$$

Pode-se notar que a equação (4.28) corresponde a uma extrapolação linear das pseudo-forças.

O critério comumente adotado no teste de convergência, para dar término ao processo iterativo, é uma relação de normas euclidianas dos deslocamentos, como a descrita no item 4.7.

Da mesma forma que, no caso em que se faz uma aproximação do vetor não linear por rigidez tangente, o estudo da estabilidade é baseado numa limitação da energia. Assim, a expressão contida em A.3, fazendo-se $F(\underline{u}_{t+\Delta t}) = \underline{K} \underline{u}_{t+\Delta t} + \underline{K}_m(\underline{u}_{t+\Delta t})$, toma a forma:

$$u_{t+\Delta t} = u_t + \frac{1}{2} \Delta u_t^T [K_{u_{t+\Delta t}} + K_{u_t} + K_m(u_{t+\Delta t}) + K_m(u_t)] + \\ + \frac{1}{4} \Delta u_t^T \left[\frac{\partial K_m(u_t^1)}{\partial u} - \frac{\partial K_m(u^2 t)}{\partial u} \right]$$

e, o estudo da estabilidade, como feito no item 4.5, continua válido, sendo:

$$F_{t+\Delta t}^{e(i)} = p_{t+\Delta t} - M \ddot{u}_{t+\Delta t} - K_{u_{t+\Delta t}} - K_m(u_{t+\Delta t}^i)$$

e,

$$F_t^e = p_t - M \ddot{u}_t - K_{u_t} - K_m(u_t)$$

O critério adotado para verificação da convergência do processo iterativo, é o mesmo da desigualdade (4.19), ou seja

$$\left| \frac{\Delta u_t^{(i)T}}{2} (F_{t+\Delta t}^{e(i)} + F_t^e) \right| \leq \epsilon (U_t + T_t)$$

Foram analisados dois exemplos de interesse:

- I. a simulação da cravação de uma estaca, sugerida nos exemplos 3.1 e 4.4
- II. modelo simplificado para a simulação da interação solo-estrutura de uma estaca sob a ação de carga de onda.

4.9.1. EXEMPLO I

Para este exemplo fez-se uma comparação com $\Delta t = 0.000125s$ e $0.0004s$. Nas figuras 4.9 e 4.10 apresentam-se os resultados para os deslocamentos na extremidade inferior da estaca e a força axial na barra 3, respectivamente, que foram comparados com os resulta-

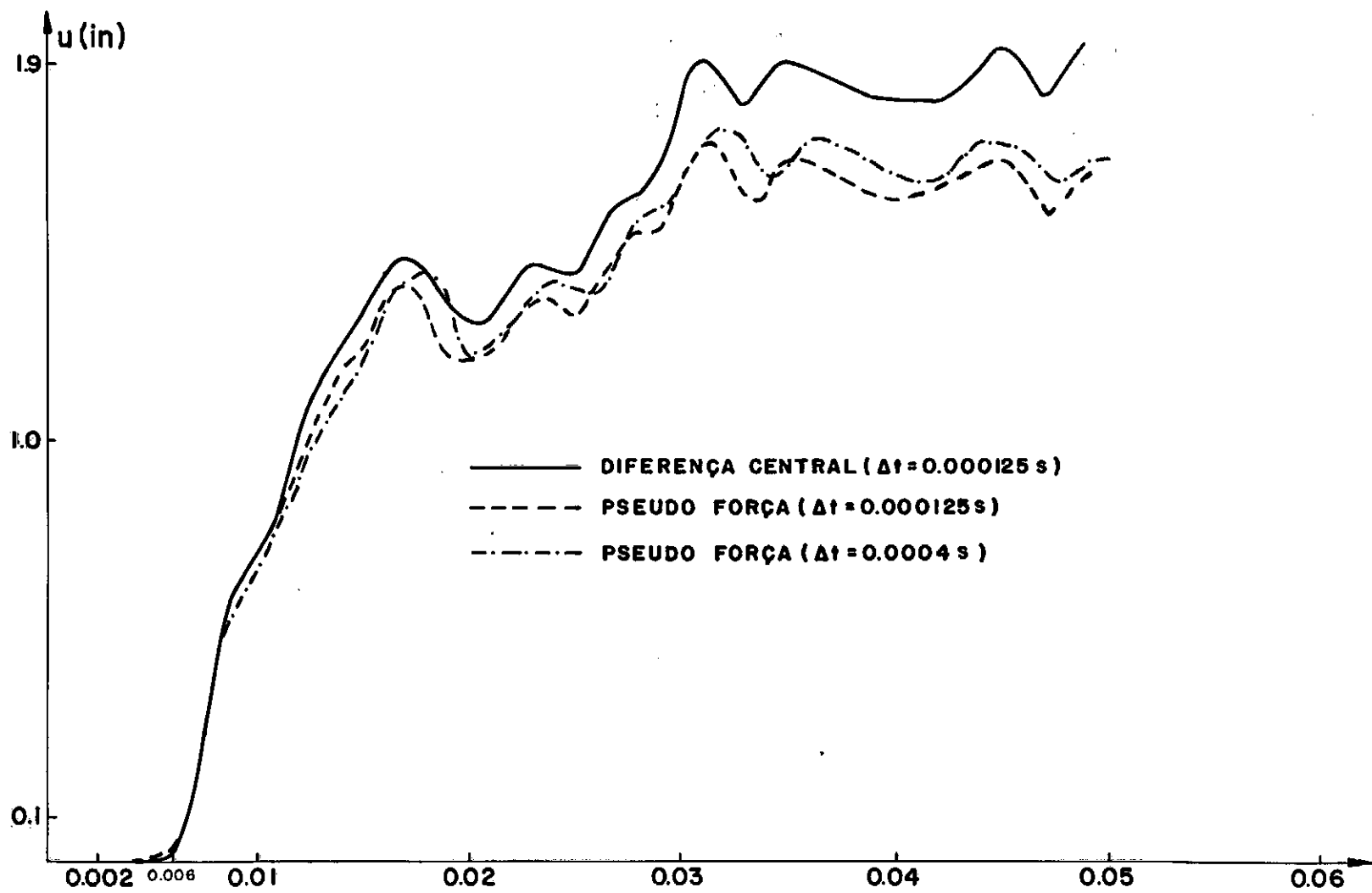


Figura 4.9

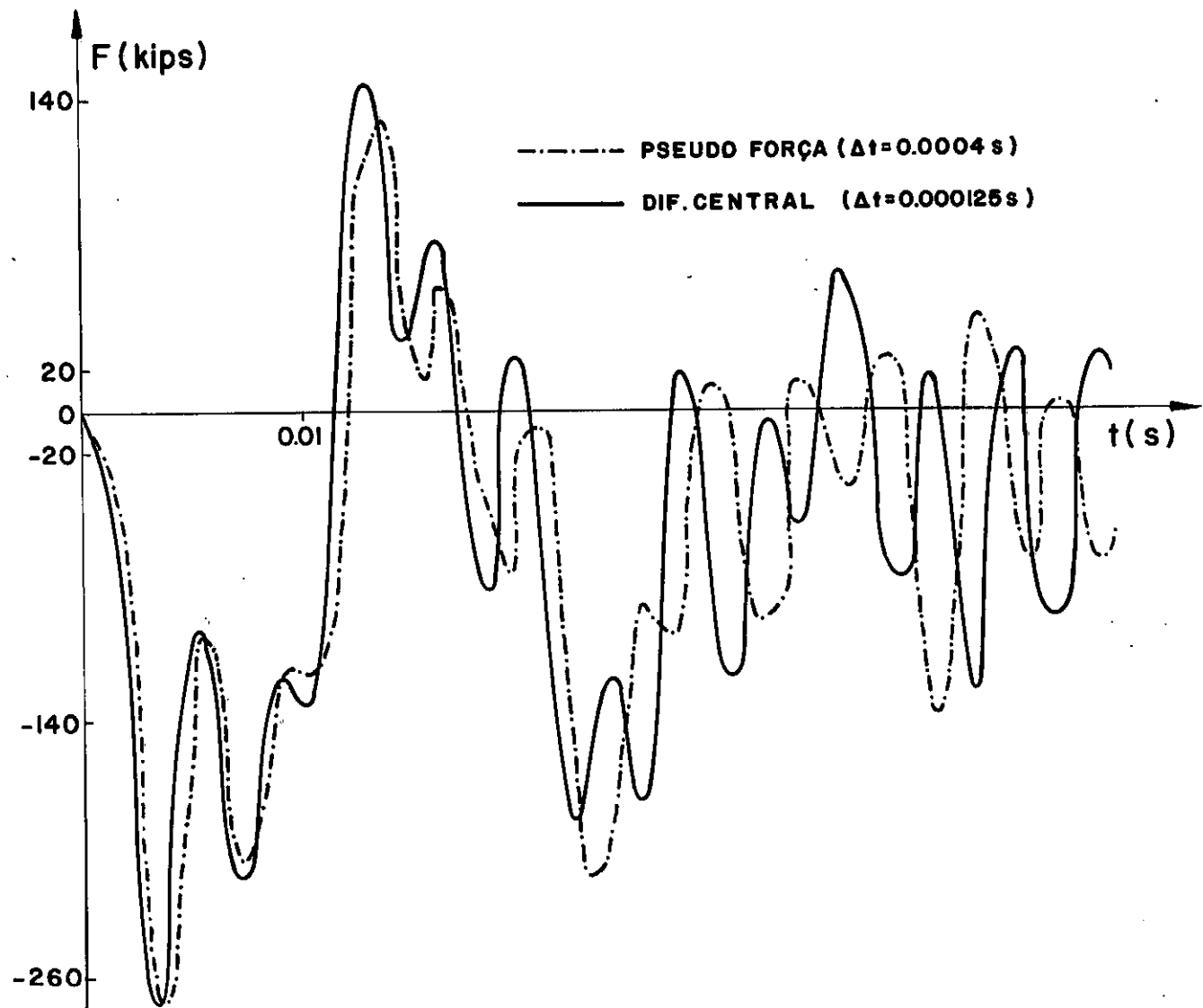


Figura 4.10

dos obtidos pelo método de diferença central e Newmark (com rigidez tangente) para $\Delta t = 0.000125s$. Os deslocamentos obtidos com os intervalos de tempo analisados, foram menores do que aqueles tomados como comparação, isto pode ser notado na Figura 4.9.

Para $\Delta t = 0.000125s$, conseguiu-se convergência com os critérios sugeridos em (4.19) e (4.23). Para $\Delta t = 0.0004s$, os resultados foram obtidos com o critério (4.23), uma vez que, não se conseguiu convergência para este intervalo de tempo com a verificação indicada em (4.19).

Para aproximação de forças, o resultado para $\Delta t = 0.000125s$ é praticamente coincidente com o obtido com o método de diferença central e Newmark com o mesmo intervalo de tempo.

Para $\Delta t = 0.0004s$, o resultado para forças, foi de início defasado daquele tomado como comparação. A partir de um certo instante ($t = 0.03s$) os resultados foram discordantes.

Como nos exemplos anteriores, tomou-se o tempo de processamento, como uma medida relativa do esforço computacional. Dessa forma, o tempo dispendido com o procedimento em questão com $\Delta t = 0.000125s$, medido com relação ao tempo gasto no método de diferença central com o mesmo intervalo de tempo (e com verificação do valor de λ feita a cada $10\Delta t$) é:

$$(t_{CPU(D.C.)}/t_{CPU(P.F.)}) = 0.25$$

4.9.2. EXEMPLO II

No segundo exemplo, procurou-se examinar o comportamento de um modelo bidimensional simplificado de uma estrutura "off-shore" fixa. Tal modelo, cujas características, estão indicadas

$$AX = 1. \quad IZ = 0.1 \quad M = 1.$$

$$E = 1000. \quad f = 0.1 \quad \rho = 0.01$$

$$P_1(t) = 0.02 \sin(2\pi ft)$$

$$P_2(t) = 0.014 \sin(2\pi ft)$$

$$P_3(t) = 0.008 \sin(2\pi ft)$$

$$P_4(t) = 0.002 \sin(2\pi ft)$$

MOLAS LINEARES

$$K_1 = 100. \quad K_2 = 400.$$

MOLAS NÃO-LINEARES

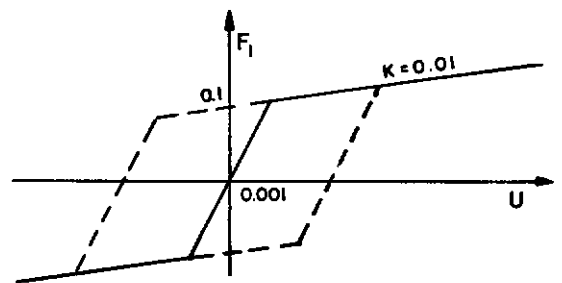


Figura 4.11

na Figura 4.11 é idealizado visando representar os mesmos mecanismos e carregamentos da análise de uma estrutura real.

Fez-se uma comparação para $\Delta t=0.001s$ e $\Delta t=0.02s$.

O critério sugerido em (4.19) foi utilizado, e não se conseguiu convergência, para $\Delta t=0.02s$.

A aproximação obtida para $\Delta t=0.001s$, foi a mesma obtida para $\Delta t=0.02s$, empregando-se a relação entre normas de deslocamentos exposta em (4.23) (com $DTOL=0.001$), e para o método de Newmark direto (rigidez tangente).

Quando se utilizou a aproximação por pseudo-forças e $DTOL=0.1$, a solução se afastou daquela tomada como comparação, como pode ser constatado na Figura 4.12, onde são mostrados os deslocamentos verticais do nó 1.

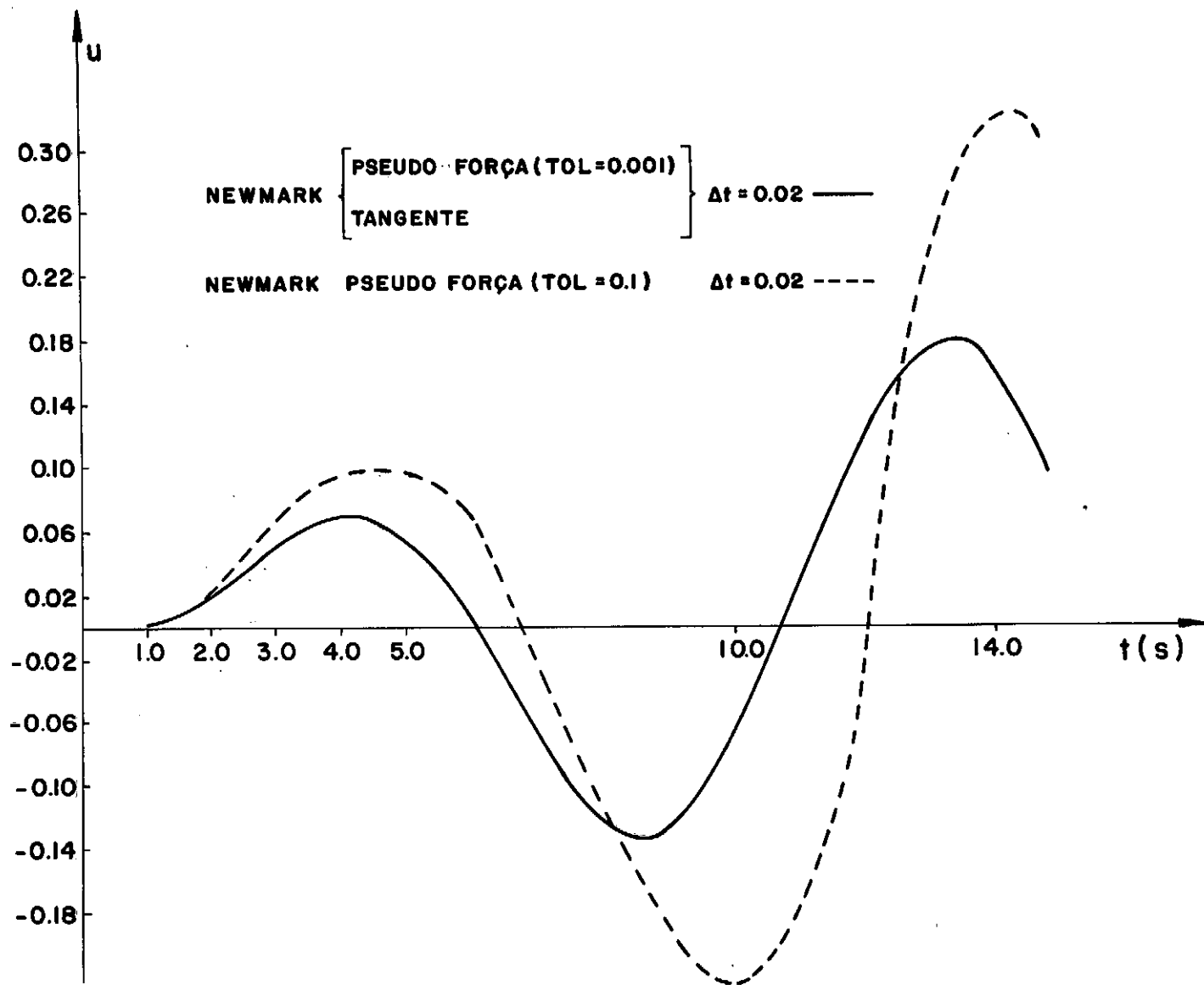


Figura 4.12

CAPÍTULO V

CONCLUSÃO

Na análise dinâmica não-linear de estruturas, embora grande parte dos problemas práticos sejam resolvidos efetivamente, e existe um número de importante áreas de pesquisa que carecem de atenção. Os problemas específicos a serem considerados são, em essência, os relacionados com a estabilidade, precisão e custo da solução.

Em geral, os sistemas computacionais disponíveis não fornecem ferramentas para que o usuário possa escolher a opção mais adequada de modo a controlar e acessar informações durante a análise. Desta forma, procurou-se implementar alguns critérios sugeridos na literatura e confrontar os seus desempenhos em situações típicas.

Pode-se notar dos problemas analisados nos capítulos III e IV que, os critérios adotados introduzem uma segurança significativa na verificação da estabilidade e convergência do processo iterativo considerado. Entretanto o custo computacional pode se tornar excessivo em alguns casos, principalmente na verificação do equilíbrio dinâmico do Método de Newmark.

No algoritmo de Diferença Central, em que o intervalo de tempo \bar{e} , relativamente pequeno, o critério de verificação da instabilidade se aplicou satisfatoriamente. Uma vez que para este algoritmo normalmente se vale de matriz de massa diagonal, o tempo consumido no cálculo da energia cinética não parece ser excessivo. O mesmo pode não ocorrer com o algoritmo de Newmark, nota-

damente quando a matriz de massa é do tipo consistente.

A norma de deslocamentos utilizada na verificação do equilíbrio dinâmico do Método de Newmark, não pode ser utilizada indiscriminadamente. Embora o esforço computacional dispendido neste processo, seja relativamente pequeno, quando comparado aos critérios de forças e energia, esta norma pode conduzir a resultados desastrosos como comentado neste trabalho.

Dos critérios implementados, o sugerido por Belytschko^{2 4} obteve resultados satisfatórios para pequenos Δt , e o sugerido por Bathe^{4 1} se aplicou com mais eficiência, para Δt relativamente grandes.

Resta considerar nestes critérios, a parcela devida ao amortecimento.

Além disso os critérios examinados deveriam ser estendidos para soluções que se valessem de processos iterativos associados a aceleradores de convergência. Entretanto, nos sistemas computacionais usuais, estes processos nem sempre estão disponíveis. É usual na prática simplesmente diminuir o intervalo de tempo, para que o esquema utilizado atinja a tolerância desejada.

Neste trabalho não foram considerados critérios que incluíssem alterações do intervalo de tempo de forma a tornar a solução auto-adaptativa.

Atualmente encontra-se na literatura propostas de algoritmos que conservam a energia do sistema.

A implementação destes algoritmos e a verificação de sua eficiência é uma alternativa que desperta interesse.

BIBLIOGRAFIA

1. BATHE, K.J.; WILSON, E.L. - Numerical Methods in Finite Element Analysis, Prentice Hall Inc., 1976.
2. CLOUGH, R.W.; PENZIEN, J. - Dynamics of Structures, McGraw Hill Inc., 1975.
3. ALBRECHT, P. - Análise Numérica - Um Curso Moderno, Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Editora da Universidade de São Paulo, Rio de Janeiro, 1973.
4. GUIMARÃES, S.S. - Análise da Estabilidade de Métodos de Integração Passo a Passo, Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, 1977.
5. LOULA, A.F.D.; GALEÃO, A.C.N. - Vibrações de Sistemas Elásticos Lineares, Publicação Técnica PDD 3/76, COPPE/UFRJ, 1976.
6. HILBER, H.M.; HUGHES, T.J.R. - Collocation, Dissipation and Overshoot for Time Integration Schemes in Structural Dynamics, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, vol. 6, 99-117, 1978.
7. NICKELL, R.E. - Direct Integration Methods in Structural Dynamics, Journal of the Engineering Mechanics Division, Proceedings of the ASCE, EM2, 303-317, April, 1973.
8. NICKELL, R.E. - On the Stability of Aproximation Operators in Problems of Structural Dynamics, International Journal of Solids and Structures, vol. 7, 301-319, 1971.
9. TRUJILLO, D.M. - The Direct Numerical Integration of Linear Matrix Differential Equations using Padé Aproximations, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 9, 259-270, 1975.
10. GOUDREAU, G.L.; TAYLOR, R.L. - Evaluation of Numerical Integration Methods in Elastodynamics, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2, 69-97, 1972.
11. PARK, K.C. - Practical Aspects of Numerical Time Integration, Computers and Structures, vol. 7, 343-353, 1977.

12. DUNHAM, R.S.; NICKELL, R.E.; STICKLER, D.C. - Integration Operators for Transient Structural Response, Computers and Structures, vol. 2, 1-15, 1972.
13. HOLMES, N.; BELYTSCHKO, T. - Postprocessing of Finite Element Transient Response Calculations by Digital Filters, Computers and Structures, vol. 6, 211-216, 1976.
14. BATHE, K.J. - Finite Formulation, Modeling, and Solution of Nonlinear Dynamic Problems - Numerical Methods for Partial Differential Equations, Academic Press, 1-40, 1979.
15. HUGHES, T.J.R. - Stability, Convergence and Growth and Decay of Energy of the Average Acceleration Method in Nonlinear Structural Dynamics, Computers and Structures, vol. 6, 313-324, 1976.
16. BARBOSA, H.J.C. - Um Algoritmo de Ordem Superior para a Integração Direta das Equações da Dinâmica Estrutural, Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, 1978.
17. BELYTSCHKO, T.; HOLMES, N.; MULLEN, R. - Explicit Integration - Stability, Solution Properties, Cost, Finite Element Analysis of Nonlinear Structural Behavior (Ed. T. Belytschko et al), ASME, AMD, vol. 14, New York, 1-21, 1975.
18. HUGHES, T.J.R. - A Note on the Stability of Newmark's Algorithm in Nonlinear Structural Dynamics, International Journal of Numerical Methods in Engineering, vol. 11, nº 2, 383-386, 1977.
19. FU, C.C. - On the Stability of Explicit Methods for the Numerical Integration of the Equations of Motion in Finite Element Methods, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 4, 95-107, 1972.
20. PARK, K.C. - Evaluating Time Integration Methods for Nonlinear Dynamics Analysis, Finite Element Analysis of Nonlinear Structural Behavior (Ed. T. Belytschko et al), ASME, AMD, vol. 14, New York, 1975.
21. NOOR, A.K.; PETERS, J.M. - Nonlinear Analysis of Space Trusses, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 21, 131-151, 1980.

22. SHANTARAN, D.; OWEN, D.R.J.; ZIENKIEWICZ, O.C. - Dynamic Transient Behaviour of Two and Three-dimensional Structures including Plasticity, Large Deformation Effects and Fluid Interaction, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, vol. 4, 561-578, 1976.
23. CHANG, C.T.; HINTON, E.; ZIENKIEWICZ, O.C. - Non-linear Response of Structure-Fluid-Foundation Systems to Earthquake Excitation - Numerical Methods in Offshore Engineering, Edited by O.C. Zienkiewicz, R.W. Lewis, K.G. Stagg, John Wiley & Sons, 1978.
24. BELYTSCHKO, T.; SCHOEBERLE, D.F. - On the Unconditional Stability of an Implicit Algorithm for Nonlinear Structural Dynamics, Journal of Applied Mechanics, ASME, 865-869, December, 1975.
25. CLOUGH, R.W.; WILSON, E.L. - Dynamic Analysis of Large Structural Systems with Local Nonlinearities, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 17/18, 107-129, 1979.
26. HUGHES, T.J.R.; CAUGHEY, T.K.; LIU, W.K. - Finite Element Methods for Nonlinear Elastodynamics which Conserve Energy, Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, vol. 45, 366-369, June, 1978.
27. STRICKLIN, J.A.; HAISLER, W.E.; RIESEMANN, W.A.V. - Comments on Nonlinear Transient Structural Analysis, Finite Element Analysis of Nonlinear Structural Behavior (Ed. T. Belytschko et al), ASME, AMD, vol. 14, New York, 157-177, 1975.
28. BATHE, K.J.; CIMENTO, A.P. - Some Practical Procedures for the Solution of Nonlinear Finite Element Equations, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 22, 59-85, 1980.
29. OWEN, D.R.J. - Application of Transient Dynamic Numerical Methods to Problems in Fracture Mechanics, Advanced Structural Dynamics, Edited by J. Donéa, Applied Science Publishers Ltd., London, 1980.

30. HAUG, E.; ROUVRAY, A.L.; NGUYEN, Q.S. - An Improved Energy Conserving Implicit Time Integration Algorithm for Non-linear Dynamic Structural Analysis, Transactions of the 4th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology, Paper M 5/3, San Francisco, August, 1977.
31. UNDERWOOD, P.; PARK, K.C. - Implementation of a Variable-step Integration Technique for Nonlinear Structural Dynamic Analysis, Transactions of the 4th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology, Paper M 5/2, San Francisco, August, 1977.
32. SHANTARAM, D.; OWEN, D.R.J.; ZIENKIEWICZ, O.C. - Dynamic Transient Behaviour of Two or Three Dimensional Structures including Plasticity, Large Deformation Effects and Fluid Interaction, Earthquake Engineering and Structure Dynamics, vol. 4, 561-578, 1976.
33. LANDAU, L.; EBECKEN, N.F.F.; LIMA, E.C.P. - Comportamento Dinâmico Não-linear de Estruturas pelo Método de Superposição Modal, Anais do III Simpósio sobre Sistemas Computacionais para Engenharia Civil/I Congresso Latino-Americano sobre Métodos Computacionais para Engenharia, Porto Alegre, 129-151, dezembro, 1979.
34. FELIPPA, C.A.; PARK, K.C. - Direct Time Integration Methods in Nonlinear Structural Dynamics, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 17/18, 277-313, 1979.
35. HOFMEISTER, L.D. - Dynamic Analysis of Structures Containing Nonlinear Springs, Computers and Structures, vol. 8, 609-614, 1978.
36. HILBER, H.M.; HUGHES, T.J.R.; TAYLOR, R.L. - Improved Numerical Dissipation for Time Integration Algorithms in Structural Dynamics, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, vol. 5, 283-292, 1977.
37. PARK, K.C.; UNDERWOOD, P.G., A variable-step Central Difference Method for Structural Dynamics Analysis - Part 1: Theoretical Aspects, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 22, 241-258, 1980.

38. BALL, R.E.; HUBKA, W.F.; HUFFINGTON JR., N.J.; UNDERWOOD, P.; VON RIESEMANN, W.A. - A Comparison of Computer Results for the Dynamic Response of the LMSC Truncated Cone, Computers and Structures, vol. 4, 485-498, 1974.
39. LOULA, A.F.D.; GUERREIRO, J.N.C. - Algoritmos para Integração no Tempo das Equações da Elasto/Plasticidade, Anais do III Simpósio sobre Sistemas Computacionais para Engenharia Civil/I Congresso Latino-Americano sobre Métodos Computacionais para Engenharia, Porto Alegre, dezembro, 1979.
40. BELYTSCHKO, T.; CHIAPETTA, R.L.; BARTEL, H.D. - Efficient Large Scale Non-linear Transient Analysis by Finite Elements, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 10, 579-596, 1976.
41. BATHE, K.J.; CIMENTO, A. - On the Time Integration of Non-linear Dynamic Response, Methodes Numériques dans les Sciences de l'ingénieur, Dunod Technique Bordas, 95-105, Paris, 1979.
42. KEY, S.W. - Transient Response by Time Integration: Review of Implicit and Explicit Operators, Advanced Structural Dynamics, Edited by J. Donêa, Applied Science Publishers Ltd., London, 1980.
43. BELYTSCHKO, T. - Explicit Time Integration of Structure, Mechanical Systems, Advanced Structural Dynamics, Edited by J. Donêa, Applied Science Publishers Ltd., London, 1980.
44. OWEN, D.R.J. - Implicit Finite Element Methods for the Dynamic Transient Analysis of Solids with Particular Reference to Non-linear Situations, Advanced Structural Dynamics, Edited by J. Donêa, Applied Science Publishers Ltd., London, 1980.
45. EBECKEN, N.F.F. - LORANE-NL - Uma Linguagem orientada a Análise Estrutural Não-linear, Tese D.Sc., COPPE/UFRJ, 1977.
46. BARBOSA, H.J.C.; COSTA, A.M.; EBECKEN, N.F.F.; VENÂNCIO FÓ, F. - Métodos de Integração Direta para a Análise Dinâmica Não-linear, XIX Jornadas Sudamericanas de Ingeniería Estructural, Santiago, Chile, Abril 1978.

47. HUMPHREYS, J.S. - On Dynamic Snap Buckling of Shallow Arches,
AIAA Journal, vol. 4, n° 5, 878-886, May, 1966.

APÊNDICE A

Expandindo-se em série de Taylor finita, a energia de de formação no tempo $t+\Delta t$ ($U_{t+\Delta t}$) em torno de U_t , tem-se:

$$U_{t+\Delta t} = U_t + \Delta u_t^T F(\underline{u}_t) + \frac{1}{2} \Delta u_t^T \frac{\partial F(\underline{u}_t^1)}{\partial \underline{u}} \Delta u_t \quad (A.1)$$

expandindo-se também, U_t em torno de $U_{t+\Delta t}$:

$$U_{t+\Delta t} = U_t - \Delta u_t^T F(\underline{u}_{t+\Delta t}) + \frac{1}{2} \Delta u_t^T \frac{\partial F(\underline{u}_t^2)}{\partial \underline{u}} \Delta u_t \quad (A.2)$$

sendo:

$$\Delta \underline{u}_t = \underline{u}_{t+\Delta t} - \underline{u}_t$$

$$\underline{F}_t = F(\underline{u}_t) \quad \text{definida como no capítulo IV}$$

$$\underline{u}_t^1 \text{ e } \underline{u}_t^2 \quad \text{algum ponto do intervalo } \underline{u}_t \text{ a } \underline{u}_{t+\Delta t}$$

Subtraindo-se (A.2) de (A.1), obtem-se:

$$\begin{aligned} U_{t+\Delta t} = U_t + \frac{1}{2} \Delta u_t^T [F(\underline{u}_{t+\Delta t}) - F(\underline{u}_t)] + \\ + \frac{1}{4} \Delta u_t^T \left[\frac{\partial F(\underline{u}_t^2)}{\partial \underline{u}} - \frac{\partial F(\underline{u}_t^1)}{\partial \underline{u}} \right] \Delta u_t \end{aligned} \quad (A.3)$$

Os dois primeiros termos do lado direito da igualdade, podem ser vistos como a integração trapezoidal que foi usada nos capítulos III e IV para o cálculo de $U_{t+\Delta t}$.

Pode-se dizer que:

$$\underline{S}_t = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial F(\underline{u}_t^2)}{\partial \underline{u}} - \frac{\partial F(\underline{u}_t^1)}{\partial \underline{u}} \right)$$

é a medida da não linearidade.

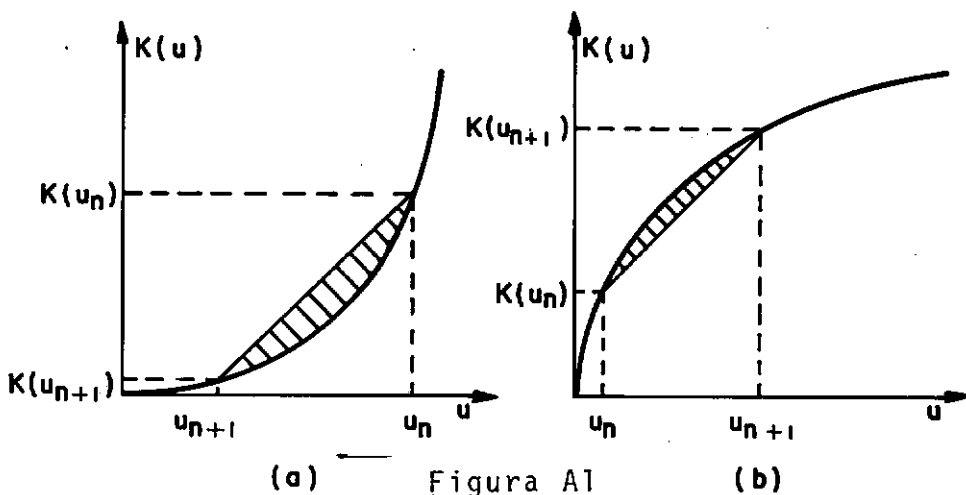
No caso linear, $\underline{S}_t=0$ e $\underline{U}_{t+\Delta t}$ é calculado exatamente.

A interpretação física de \underline{S}_t , pode ser vista no caso unidimensional. Neste caso \underline{S}_t representa a área entre a curva do material e a aproximação secante, como pode ser visto na Figura A.1.

Assim, quando se faz o cálculo de $\underline{U}_{t+\Delta t}$ pela regra do trapézio, pode se estar aumentando ou diminuindo a energia do sistema, dependendo se se trata de carregamento ou descarregamento ou se o material enrijece ou não.

Dessa forma, pode-se notar quatro casos distintos:

- se o material enrijece, a aproximação:
 - . gera energia no processo de descarregamento (Figura A.1a)
 - . dissipa energia no processo de carregamento
- se o material não enrijece a aproximação:
 - . gera energia no processo de carregamento (Figura A.1b)
 - . dissipa energia no processo de descarregamento.



APÊNDICE B

O ALGORITMO DE CRANK-NICHOLSON E A REGRA TRAPEZOIDAL

Seja o sistema de equações não lineares de 1ª ordem:

$$\dot{\underline{y}} = \underline{f}(\underline{y}, t) \quad (\text{B.1})$$

e o problema de valor inicial que, consiste em encontrar \underline{y} que satisfaça a (B.1) e a

$$\underline{y}(0) = \underline{y}_0 \quad .$$

O algoritmo de Crank-Nicholson consiste em satisfazer a:

$$\underline{z}_{t+\Delta t} - \underline{z}_t = \frac{\Delta t}{2} [\underline{f}(\underline{z}_{t+\Delta t}, t+\Delta t) + \underline{f}(\underline{z}_t, t)] \quad (\text{B.2})$$

sendo, \underline{z}_t uma aproximação para \underline{y}_t , $t \in \{0, 1, \dots, n\Delta t\}$. Considerando-se o sistema de equações (4.1) se:

$$\underline{z}_t = \begin{Bmatrix} \underline{u}_t \\ \dot{\underline{u}}_t \end{Bmatrix} \quad (\text{B.3})$$

$$\text{e,} \quad \underline{f}(\underline{z}_t, t) = \begin{Bmatrix} \underline{u}_t \\ \underline{M}^{-1}(\underline{p}_t - \underline{C} \dot{\underline{u}}_t - \underline{F}(\underline{u}_t)) \end{Bmatrix} \quad (\text{B.4})$$

(B.3), (B.4) e (B.1), são equivalentes ao algoritmo de Newmark com $\alpha=1/2$ e $\beta=1/4$.

Para garantir solução única, assume-se que f satisfaça a condição de Lipschitz.

Para o estudo da estabilidade e convergência da regra trapezoidal necessita-se definir o erro de truncamento local τ_n :

$$y_{t+\Delta t} - y_t = \frac{\Delta t}{2} [f(y_{t+\Delta t}, t+\Delta t) + f(y_t, t)] + \tau_t \quad (B.5)$$

Expandindo-se $y_{t+\Delta t}$ em série de Taylor em torno de y_t e igualando-se com (B.5), conclui-se que τ_n é $o(\Delta t^3)$. Dessa forma, pode-se dizer que:

$$\|\tau_t\| < \bar{\tau} \Delta t^3$$

sendo $\bar{\tau}$ uma constante positiva.

Além disso, torna-se necessário o conhecimento da desigualdade discreta de GRONWALL¹⁵:

sendo a_i , $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ uma sequência de constantes não negativas, se:

$$a_n \leq b_1 + \frac{b_2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} a_i \quad (B.6a)$$

então,

$$a_n \leq b_1 e^{b_2} \quad (B.6b)$$

b_1 e b_2 são constantes e $b_1 \geq 0$.

- Estabilidade

Definindo-se estabilidade como: sendo z_0 e \bar{z}_0 condições iniciais para z_t e \bar{z}_t respectivamente, deve existir uma constan-

te c_1 tal que:

$$\|z_t - \bar{z}_t\| \leq c_1 \|z_0 - \bar{z}_0\|, \text{ para todo } \Delta t < c_2,$$

sendo c_1 e c_2 constantes positivas. Dessa forma pode-se dizer que:

$$\begin{aligned} \|z_t - \bar{z}_t\| &= \|z_{t-\Delta t} - \bar{z}_{t-\Delta t} + \frac{\Delta t}{2} [f(z_{t+\Delta t}, t+\Delta t) + f(z_t, t) - \\ &\quad - f(\bar{z}_{t+\Delta t}, t+\Delta t) + f(\bar{z}_t, t)]\| \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \|z_t - \bar{z}_t\| &\leq \|z_{t-\Delta t} - \bar{z}_{t-\Delta t}\| + \frac{\Delta t}{2} \|f(z_{t+\Delta t}, t+\Delta t) - \\ &\quad - f(\bar{z}_{t+\Delta t}, t+\Delta t) + f(z_t, t) - f(\bar{z}_t, t)\| \end{aligned} \quad (B.7)$$

sendo f Lipschitz continua e L a constante de Lipschitz isto é:

$$\|f(z_1, t) - f(z_2, t)\| \leq L \|z_1 - z_2\| \quad (B.8)$$

Substituindo-se (B.8) em (B.7):

$$\|z_t - \bar{z}_t\| \leq \frac{\Delta t L}{2} \|z_t - \bar{z}_t\| + (1 + \frac{\Delta t L}{2}) \|z_{t-\Delta t} - \bar{z}_{t-\Delta t}\|$$

Se $t < 2/L$, tem-se:

$$\|z_t - \bar{z}_t\| \leq \frac{1 + \frac{\Delta t L}{2}}{1 - \frac{\Delta t L}{2}} \|z_{t-\Delta t} - \bar{z}_{t-\Delta t}\|$$

$$\|z_t - \bar{z}_t\| \leq \left[\frac{1 + \frac{\Delta t L}{2}}{1 - \frac{\Delta t L}{2}} \right]^n \|z_0 - \bar{z}_0\|$$

e, finalmente utilizando-se (B.6) chega-se a:

$$\| z_t - \bar{z}_t \| \leq e^{n\Delta t L / (1 - \Delta t L / 2)} \| z_0 - \bar{z}_0 \|$$

Tem-se então que:

$$c_2 < \frac{2}{L}$$

e

$$c_1 = e^{n\Delta t L / (1 - \Delta t L / 2)}$$

- Convergência

Um algoritmo para (B.1) é dito ser convergente, se para cada $t \in [0, T]$, a aproximação $z_t \rightarrow y_t$, quando $\Delta t \rightarrow 0$.

Chamando-se o erro no tempo t de $e_t = y_t - z_t$ então,

$$e_{t+\Delta t} - e_t = y_{t+\Delta t} - y_t - z_{t+\Delta t} - z_t \quad (B.9)$$

Substituindo-se (B.2) e (B.5) em (B.9), tem-se:

$$e_{t+\Delta t} - e_t = \Delta t \left[\frac{f(y_{t+\Delta t}, t+\Delta t) + f(y_t, t)}{2} - \frac{f(z_{t+\Delta t}, t+\Delta t) + f(z_t, t)}{2} \right] + \bar{\tau}_t \quad (B.10)$$

Fazendo-se o tempo assumir valores discretos de 0 a $t = n\Delta t$, pode-se colocar e_t na seguinte forma:

$$e_t = \frac{\Delta t}{2} [f(y_t, t) - f(z_t, t)] + \Delta t \sum_{m=0}^{n-1} [f(y_{m\Delta t}, m\Delta t) - f(z_{m\Delta t}, m\Delta t)] + \sum_{m=0}^{n-1} \bar{\tau}_m$$

normalizando-se:

$$\begin{aligned} \| \underline{e}_t \| &\leq \frac{\Delta t}{2} \| \underline{f}(\underline{y}_t, t) - \underline{f}(\underline{z}_t, t) \| + \\ &+ \Delta t \sum_{m=0}^{n-1} \| \underline{f}(\underline{y}_{m\Delta t}, m\Delta t) - \underline{f}(\underline{z}_{m\Delta t}, m\Delta t) \| + \\ &+ \sum_{m=0}^{n-1} \| \underline{\tau}_{m\Delta t} \| \end{aligned}$$

Considerando-se (B.8):

$$\| \underline{e}_t \| \leq \frac{\Delta t L}{2} \| \underline{y}_t - \underline{z}_t \| + \Delta t L \sum_{m=0}^{n-1} \| \underline{y}_{m\Delta t} - \underline{z}_{m\Delta t} \| + \sum_{m=0}^{n-1} \| \underline{\tau}_{m\Delta t} \|$$

$$\text{como } \| \underline{\tau}_t \| < \bar{\tau} \Delta t^3, \quad \sum_{m=0}^{n-1} \| \underline{\tau}_{m\Delta t} \| < t \bar{\tau} \Delta t^2$$

logo:

$$\| \underline{e}_t \| \leq \frac{\Delta t L}{2} \| \underline{e}_t \| + \Delta t L \sum_{m=0}^{n-1} \| \underline{e}_{m\Delta t} \| + t \bar{\tau} \Delta t^2$$

Se $\Delta t < 2/L$, pode-se dizer que:

$$\| \underline{e}_t \| \leq \left(1 - \frac{\Delta t L}{2}\right)^{-1} (t \bar{\tau} \Delta t^2 + \Delta t L \sum_{m=0}^{n-1} \| \underline{e}_{m\Delta t} \|)$$

que pode ser colocado como:

$$\| \underline{e}_t \| \leq b_1 e^{b_2}$$

$$\text{sendo } b_1 = t \bar{\tau} \Delta t^2 \left(1 - \frac{\Delta t L}{2}\right)^{-1}$$

$$b_2 = tL(1 - \frac{\Delta t L}{2})^{-1}$$

e, $\|e_t\| \rightarrow 0$, quando $\Delta t \rightarrow 0$.